MA1101, 28/11-2005.

Hjemmeøving - løsningsforslag i

Oppgave 1 :

Vi bruker substitusjonen $u = \sqrt{x}$. Da får vi

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad , \therefore \quad dx = 2\sqrt{x}\,du = 2u\,du$$

Derfor får vi:

$$\int x e^{\sqrt{x}} dx = \int \underbrace{x}_{(\sqrt{x})^2 = u^2} \cdot e^{u} \cdot 2u\,du = 2\int u^3 e^{u} du.$$

Bruker vi delvis integrasjon tre ganger får vi:

$$\int u^3 e^u du = u^3 e^u - 3\int u^2 e^u du$$

$$= u^3 e^u - 3\left(u^2 e^u - 2\int u e^u du\right)$$

$$= u^3 e^u - 3u^2 e^u + 6\left(u e^u - \int e^u du\right)$$

$$= u^3 e^u - 3u^2 e^u + 6u e^u - 6e^u + C$$

$$= e^u (u^3 - 3u^2 + 6u - 6) + C$$

Derfor får vi:

$$\int x e^{\sqrt{x}} dx = 2 e^{\sqrt{x}} \left(x^{3/2} - 3x + 6x^{1/2} - 6\right) + C.$$

Oppgave 2

Ved definisjon har vi

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+2x^2)^{3/2}} = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{x\,dx}{(1+2x^2)^{3/2}}.$$

$$\int_0^R \frac{x\,dx}{(1+2x^2)^{3/2}} = \frac{1}{4}\int_{x=0}^{x=R} \frac{du}{u^{3/2}} = -\frac{1}{2}u^{-1/2}\Big|_{x=0}^{x=R}$$

$u = 1+2x^2$

$\frac{du}{4x} = dx$

$$= -\frac{1}{2(1+2x^2)^{1/2}}\Big|_0^R$$

$$= -\frac{1}{2(1+2R^2)^{1/2}} + \frac{1}{2}.$$

Da får vi:

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+2x^2)^{3/2}} = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{x\,dx}{(1+2x^2)^{3/2}}$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{2(1+2R^2)^{1/2}} + \frac{1}{2}\right)$$

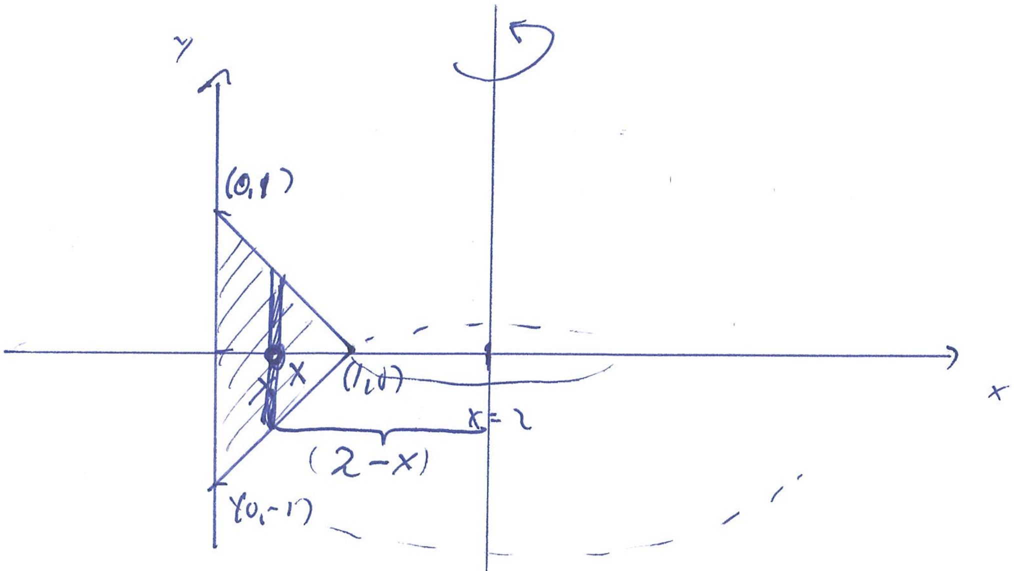
$$= \frac{1}{2}.$$

Derfor konvergerer integralet!

Oppgave 3

Området innenfor trekanten med hjørner $(0,-1)$, $(1,0)$ og $(0,1)$ tilsvarer området mellom linjene $y=1-x$ og $y=x-1$ fra $x=0$ til $x=1$.

Alt. a:



Her lønner det seg å bruke sylinderskallmetoden. Vi får at volumet blir: (radius i sylinderskallene blir: 2−x !)

$$V = 2\pi \int_{x=0}^{x=1} (2-x)\,(1-x-(x-1))\,dx$$

$$= 2\pi \int_{x=0}^{x=1} (2-x)(2-2x)\,dx = 4\pi \int_0^1 (2-3x+x^2)\,dx$$

$$= 4\pi\left(2x - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = 4\pi\left(2 - \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{3} - (0)\right)$$

$$= 4\pi\left(\tfrac{5}{6}\right) = \underline{\underline{\tfrac{10}{3}\pi}}$$

Oppgave 4 Det første vi legger merke til er at e^{t^2} ikke har noen antiderivert (så vi følger hintet). Dessuten ser vi at $\lim_{x\to 0} \int_0^x e^{t^2}\,dt = 0$, så grenseverdien er et ubestemt uttrykk på formen $\left[\frac{0}{0}\right]$. Vi bruker L'Hôpitals regel og analysens fundamentalteorem og får:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x e^{t^2}\,dt - \sin x}{x - \sin x} \overset{L.H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{1-\cos x} \overset{L.H}{=}$$

$$\overset{LH}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2xe^{x^2} + \sin x}{\sin x} \overset{LH}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} + \cos x}{\cos x}$$

$$= \frac{2+1}{1} = 3.$$

(Vi brukte L'Hôpitals regel tre ganger.).

Oppgave 5 a)

$$f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{1+(x+1)^2}.$$

Siden f er deriverbar i $\mathbb{R}$, vil vi finne eventuelle lokale ekstremalverdier (⊃: lok. maks/min.) blant punktene der $f'(x)=0$.

$$f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{1+(x+1)^2} = 0 \iff (x+1)^2+1 = 4$$

$$\iff x^2+2x-2=0.$$

Så

$$x = -1 \pm \frac{\sqrt{4-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}.$$

Vi ser at $f'(x) > 0 \iff 1+(1+x)^2 > 4$

$$\iff (1+x)^2 > 3$$

$$\iff |1+x| > \sqrt{3}$$

⊃: $x+1 > \sqrt{3} \iff x > -1+\sqrt{3}$

eller

$$-(x+1) > \sqrt{3} \iff x < -1-\sqrt{3}.$$

På samme måte ser vi at

$$f'(x)<0 \iff (1+x)^2<3$$
$$\iff |1+x|<\sqrt{3}$$
$$\iff -1-\sqrt{3}<x<-1+\sqrt{3}.$$

Siden

$f'(x)>0$ i $]-\infty, -1-\sqrt{3}[$ og $f'(x)<0$ i $]-1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}[$, må $x=-1-\sqrt{3}$ gi en lokal maksimumsverdi for f. Siden $f'(x)<0$ i $]-1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}[$ og $f'(x)>0$ i $]-1+\sqrt{3}, \infty[$, må $x=-1+\sqrt{3}$ gi en lokal minimumsverdi for f. Siden $f'(x)=0$ for alle ekstremalpunkt, er dette alle de mulige ekstremalpunktene.

b). $y=ax+b$ er skrå asymptote for $f(x)$ hvis $\lim_{x\to\infty}(f(x)-(ax+b))=0$ eller $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(ax+b))=0$.

Vi ser at

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-\left(\tfrac{1}{4}x-\tfrac{\pi}{2}\right)\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\tfrac{1}{4}x-\tan^{-1}(1+x)-\tfrac{1}{4}x+\tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\tfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}(1+x)\right)=\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{\pi}{2}=0.$$

og at

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-\left(\tfrac{1}{4}x+\tfrac{\pi}{2}\right)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\tfrac{1}{4}x-\tan^{-1}(1+x)-\tfrac{1}{4}x-\tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-\tan^{-1}(1+x)-\tfrac{\pi}{2}\right)=-\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)-\tfrac{\pi}{2}=0.$$

Derfor er $y=\frac{1}{4}x-\frac{\pi}{2}$ og $y=\frac{1}{4}x+\frac{\pi}{2}$ skrå asymptoter for f (eller for grafen til f).

c) Vi merker oss først at

$$f(-1-\sqrt{3}) = \frac{(-1-\sqrt{3})}{4} - \tan^{-1}(1-1-\sqrt{3})$$
$$= \frac{-1-\sqrt{3}}{4} + \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{-1-\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3} > 0,$$

mens

$$f(-1+\sqrt{3}) = \frac{-1+\sqrt{3}}{4} - \tan^{-1}(1+(-1+\sqrt{3}))$$
$$= \frac{\sqrt{3}-1}{4} - \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}-1}{4} - \frac{\pi}{3} < 0.$$

Skjæringssetningen!

Siden f er kontinuerlig, og siden f skifter fortegn i $[-1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}]$, må der finnes $x_1 \in]-1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}[$ med $f(x_1)=0$. Der finnes høyst en slik x_1 (altså høyst ett nullpunkt) siden $f'(x) < 0$ i $]-1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}[$ (punkt a)). Så f har nøyaktig ett nullpunkt i $[-1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}]$.

dette gir at f er 1-1 i $[-1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}]$

Siden $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ (punkt b)), og siden

$f(-1-\sqrt{3}) > 0$, må der ved skjæringssetningen finnes en $x_2 \in]-\infty, -1-\sqrt{3}[$ s.a. $f(x_2)=0$. Siden $f'(x) > 0$ i $]-\infty, -1-\sqrt{3}[$, er f 1-1 der, og der kan ikke være flere nullpunkt i dette intervallet

Siden $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ (punkt b)), og siden $f(-1+\sqrt{3}) < 0$,

må der ved skjæringssetningen finnes en $x_3 \in]-1+\sqrt{3}, \infty[$

s.a. $f(x_3)=0$. $f'(x) > 0$ i $]-1+\sqrt{3}, \infty[$, slik at f er

1-1 dvs. Da kan ikke f ha flere nullpunkt i $[-1+\sqrt{3}, \infty[$.

Konklusjonen er altså at f har nøyaktig ett nullpunkt i hvert av intervallene

$]-\infty, -1-\sqrt{3}[$, $[-1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}]$ og $]-1+\sqrt{3}, \infty[$,

og dermed har f nøyaktig tre (3) nullpunkt i $\mathbb{R}$.