

LØSNING OG KOMMENTARER:

Oppgaven faller vanskelig, men er samtidig svært lærerik. Den viser at en presis definisjon av limes-begrepet er nødvendig. Uten en presis definisjon er det umulig å gi et bevis for at når $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ eksisterer, så er denne grensen entydig bestemt.

Dersom vi studerer grafen til funksjonen $f(x) = \sin \frac{1}{x}$; $x \neq 0$, nær $x=0$, kunne en lett tro at funksjonen nærmer seg L for ethvert $L \in [-1,1]$. Hvis dette var mulig ville vårt limes-begrep vært lite tilfredsstillende. Det ville bl.a. føre til at en gitt funksjon kunne ha flere forskjellige deriverte i et og samme punkt.

Vi gjennomfører et motsigelsesbevis. Vi antar derfor at $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ og at $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$ der $L \neq M$. Da er $\varepsilon = \frac{1}{3}|L-M| > 0$ et "lurt" valg for å oppnå selvmodsigelse.

Av vår antagelse følger da:

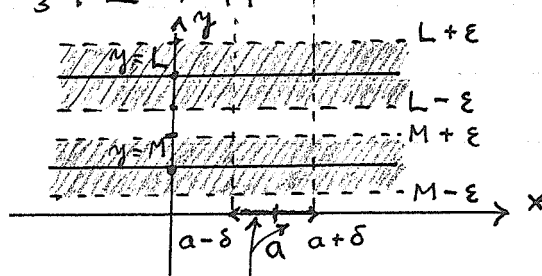
Det finnes et $\delta_1 > 0$ slik for alle x som oppfyller $0 < |x-a| < \delta_1$, vil $|f(x) - L| < \varepsilon$, og samtidig finnes det et $\delta_2 > 0$ slik at for alle x slik at $0 < |x-a| < \delta_2$, vil $|f(x) - M| < \varepsilon$. Velges da $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, har vi at for alle x

som er slik at $0 < |x - a| < \delta$ gjelder

samtidig at:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{og} \quad |f(x) - M| < \varepsilon.$$

At dette er umulig sees nå litt ved en figur-betraktning siden vi har valgt $\varepsilon = \frac{1}{3} |L - M|$



(For hver $x \neq a$ i dette intervall skal $(x, f(x))$ ligge i begge de skravete stripene. Dette er selvsagt umulig!)

Dette innsees enda klarere slik:

$$|L - M| = |L - f(x) + f(x) - M| \stackrel{\text{TREKANTULIKHET}}{\leq}$$

$$|L - f(x)| + |f(x) - M| < 2\varepsilon = \frac{2}{3} |L - M|$$

for alle $x \in]a - \delta, a + \delta[$, $x \neq a$. Men $|L - M| < \frac{2}{3} |L - M|$

er selvsagt galt. Altså har antagelsen om at $L \neq M$ gitt en selvmodsigelse.

TENK OVER DENNE LØSNINGEN. DET TAR TID FOR DE FLESTE - MEN NÅR MAN SKJØNNER DETTE ARGUMENTET HAR MAN KOMMET ET SKRITT FRAMOVER NÅR DET GJELDER FORSTÅELSEN AV LIMES - BEGREPET !!

P.jf.