Eksamen MA1101 vår 2006: Løsningsforslag.

Oppg. 1 a) f er deriverbar i $\mathbb{R}$. Da vil f vokse i $[a,b]$ om $f'>0$ i $]a,b[$ og avta om $f'<0$.

$$f'(x) = (2-x)e^x - e^x = (1-x)e^x$$

$f'(x) > 0$ når $1-x>0$, $\Rightarrow$: $x<1$

$f'(x) < 0$ når $1-x<0$ $\Rightarrow$: $x>1$.

Så: f vokser i $]-\infty, 1]$, avtar i $[1,\infty[$.

b) Siden f er deriverbar i $\mathbb{R}$, finnes evt. ekstremalverdier der $f'(x)=0$. Dvs:

$$f'(x) = (1-x)e^x = 0 \iff x=1.$$

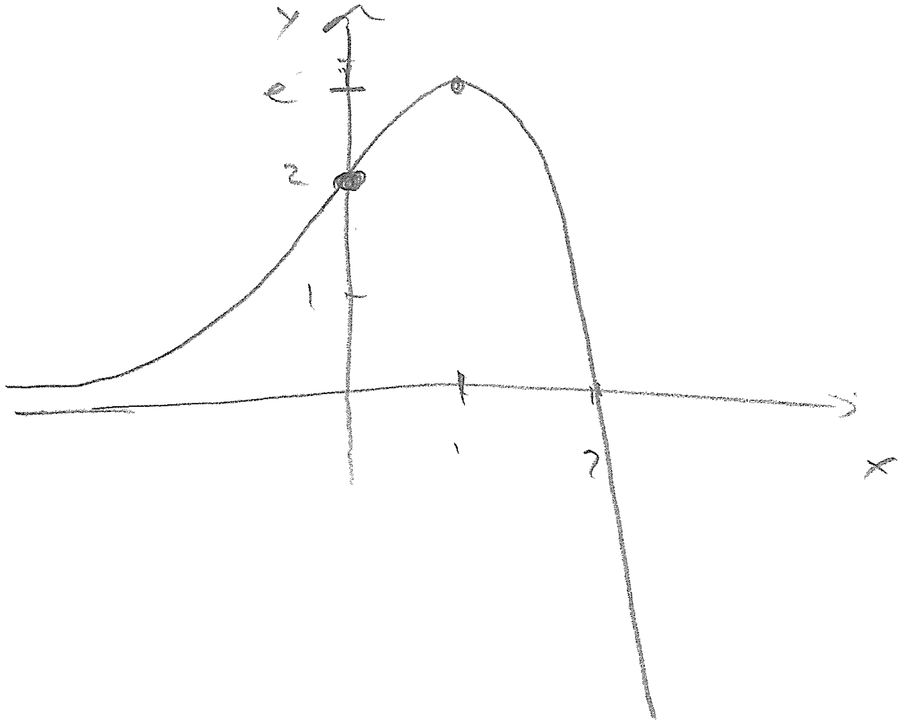
Siden $f'(x)>0$ i $]-\infty,1[$ og $f'(x)<0$ i $]1,\infty[$ må $x=1$ gi absolutt maksimum.

$f(1) = (2-1)e^1 = e^1$ er altså absolutt maks for f. Ingen lok. min. verdier (Horis. asymptote:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(2-x)e^x$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+x}{e^x}\right) = 0$$

Så $y=0$ er horis. asymptote.)



c) $f''(x) = (1-x)e^x - e^x = -xe^x$.

Viser at $y=f$ e løsning ved å sette inn i ligningen :

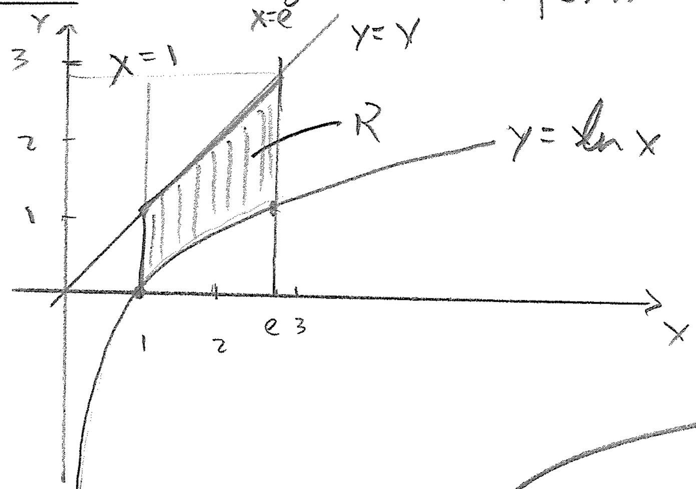
$$f''-2f'+f = -xe^x - 2(1-x)e^x + (2-x)e^x$$

$$= -\cancel{x}e^x - \cancel{2}e^x + 2\cancel{xe}^x + \cancel{2}e^x - xe^x$$

$$= 0.$$

(Det går også an å løse den oppgitte ligningen på den vanlige måten, men det er jo ganske tungvint)

Oppg. 2 a) Tegner skisse først:



Vi vil altså finne arealet av den skraverte området R.

$$\text{Areal } R = \int_1^e (x - \ln x)\,dx$$

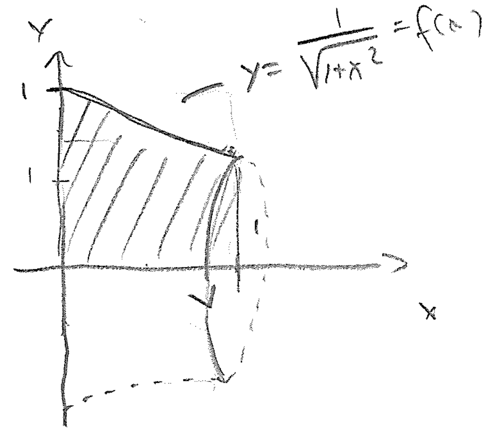
$$= \left[\tfrac{1}{2}x^2 - x\ln x + x\right]_1^e$$

(Minner om $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$
(bruk evt. delvis int.))

$$= \left(\tfrac{1}{2}e^2 \overbrace{- e\ln e + e}^{0}\right) - \left(\tfrac{1}{2}\cdot 1 - 1\cdot\ln 1 + 1\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{3}{2} = \underline{\tfrac{1}{2}(e^2 - 3).}$$

b)



Her lønner det seg å bruke tverrsnittmetoden: Volumet av omdreiningslegemet blir:

$$V = \int_0^1 \pi (f(x))^2\,dx = \pi \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \pi \left[\arctan x\right]_0^1 = \pi(\arctan 1 - \arctan 0)$$

$$= \pi\left[\frac{\pi}{4} - 0\right] = \frac{\pi^2}{4}.$$

//

Oppg. 3 a) Merk at $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x} = -\infty$. Så $\lim_{x\to1^+} 2^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to1^+} 0$

Da blir altså:

$$\lim_{x\to1^+} \frac{3}{1+2^{1/(1-x)}} = \frac{3}{1+0} = \underline{\underline{3.}}$$

b). Dette er et ubestemt uttrykk på formen $[0^0]$. Vi ser derfor først på

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x^{\sin x}) = \lim_{x\to 0^+} \sin x \ln x$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}}_{\text{på formen } [\frac{0}{0}]} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= 0.$$

Husk:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Da er, ved kontinuitet,

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^{\sin x}} = e^{\lim_{x\to 0^+} \sin x \ln x} = e^{0} = 1.$$

Oppg. 4. Vet at $\frac{dA}{dt} = 2$

Dessuten: $A = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h = \frac{1}{2}g \quad (h=1)$.

$\tan\theta = \frac{1}{g}. \quad \therefore \theta = \arctan\frac{1}{g}.$

Vil finne: $\frac{d\theta}{dt}$. $\quad \underset{\text{Kjerneregel}}{\frac{d\theta}{dt}} = \frac{1}{1+(\frac{1}{g})^2}\cdot\left(-\frac{1}{g^2}\right)\cdot\frac{dg}{dt} = \frac{-1}{(g^2+1)}\frac{dg}{dt}$

$A = \frac{1}{2}g \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dg}{dt} \Rightarrow \frac{dg}{dt} = 2\frac{dA}{dt} = 2\cdot 2 = 4.$

Når $g = \frac{1}{\sqrt{3}}$ får vi derfor

$$\underline{\underline{\frac{d\theta}{dt}}} = \frac{-1}{\frac{1}{3}+1}\cdot 4 = -\frac{4}{\frac{4}{3}} = \underline{\underline{-3.}}$$

Så vinkelen ~~øker~~ med -3 radianer pr. sek.
(egentlig: avtar med 3...)

Oppg. 5

a) $\lim_{x \to 0} g(x) = \infty$ betyr:

1) For ethvert pos. tall $A > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at $0 < |x| < \delta \Rightarrow g(x) > A$.

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ betyr: for hver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \varepsilon.$$

det er dette vi skal vise!!!

Så ta en vilkårlig $\varepsilon > 0$, og la $A = \frac{M}{\varepsilon}$. Til denne A finnes $\delta > 0$ slik at

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow \underset{|g(x)|}{\underset{\shortparallel}{g(x)}} > A.$$

Når $0 < |x| < \delta$ får vi da:

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \frac{|f(x)|}{g(x)} \le \frac{M}{g(x)} < \frac{M}{M/\varepsilon} = \varepsilon.$$

M.a.o.: det finnes en δ (som vi fikk fra $A = \frac{M}{\varepsilon}$) slik at når $0 < |x| < \delta$, så er

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \varepsilon,$$

som var det vi skulle bevise.

b). Det er <u>ikke</u> riktig.

La $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

Da er $|f(x)| \leq 1$ i hele $\mathbb{R}$.

La $g(x) \equiv 1$. Da er $\lim_{x \to 0} g(x) = 1$.

Men $\lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ finnes ikke. ///.

<u>NB</u>: Oppg. 4 er uheldig formulert: det burde ikke ha stått <u>øker</u>.