**Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet**
**Institutt for matematiske fag**


# Eksamen i MA6101, 6. juni 2006 - løsningsforslag

## Oppgave 1

**a)** Funksjonen $f$ er to ganger deriverbar for $x > 0$. Vi har

$$f'(x) = 1 - e \cdot \frac{1}{x} = 1 - \frac{e}{x},$$

og

$$f''(x) = 0 - (-1)\frac{e}{x^2} = \frac{e}{x^2}.$$

Siden $f$ er deriverbar for $x > 0$ er $f$ voksende i $[a, b]$ hvis $f'(x) > 0$ i $]a, b[$ og likeledes avtagende hvis $f'(x) < 0$ der. Vi ser at $f'(x) = 1 - \frac{e}{x} > 0$ når $x > e$ og $f'(x) < 0$ når $x < e$. Derfor er $f$ voksende i $]0, e]$ og avtagende i $[e, \infty[$.

**b)** Siden $f$ er deriverbar i $]0, \infty[$ forekommer eventuelle ekstremalverdier der $f'(x) = 0$. Fra **a)** har vi at $f'(x) = 1 - e/x = 0$ kun hvis $x = e$. $x = e$ gir altså den eneste kandidaten til en ekstremalverdi. Videre er $f''(x) > 0$ for $x > 0$, så $x = e$ må gi en absolutt minimumsverdi for $f$. Denne verdien er $f(e) = e - e \cdot \ln e = 0$. (Merk at $\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty = \lim_{x\to\infty} f(x)$, slik at $f$ heller ikke har noen horisontale asymptoter.)

**c)** Siden $\ln x$ er en voksende funksjon har vi at

$$e^x \geq x^e \;\Leftrightarrow\; \ln e^x \geq \ln x^e \;\Leftrightarrow\; x \geq e \ln x \;\Leftrightarrow\; f(x) = x - e \ln x \geq 0.$$

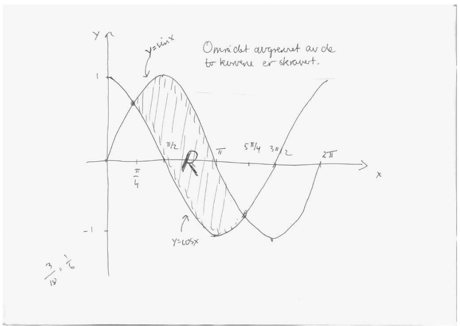
Fra **b)** har vi at $f(e) = 0$ er en absolutt minimumsverdi for $f$, slik at den siste ulikheten gjelder. Derfor er $e^x \geq x^e$.

## Oppgave 2

**a)** Vi lager en skisse av grafene til $y = \cos x$ og $y = \sin x$ for $0 \leq x \leq 2\pi$; vi skal finne arealet av det skraverte området $R$:

For å finne skjæringspunktene mellom grafene til $y = \sin x$ og $y = \cos x$ må vi løse ligningen $\sin x = \cos x$. Så lenge $\cos x = 0$ betyr det at $\tan x = 1$, hvilket vil si at $x = \pi/4 + n\pi, n = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots$. Dette gir $x = \pi/4$ eller $x = 5\pi/4$ i $[0, 2\pi]$. I intervallet $[\pi/4, 5\pi/4]$ er $\sin x \geq \cos x$ fordi begge funksjonene er kontinuerlige, og $\sin \pi/2 = 1 > 0 = \cos \pi/2$. Da finner vi arealet av $R$ ved å integrere:

$$A(R) = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x)\, dx = [-\cos x - \sin x]_{\pi/4}^{5\pi/4} = 2\sqrt{2}.$$




**b)** Siden vi dreier området om $x$-aksen er det mest naturlig (og definitivt det enkleste) å bruke sylinderskallmetoden. Radius i sylinderen blir avstanden fra $y$-aksen, dvs. $x$. Høyden til sylinderen blir $\sin x - \cos x$. Derfor blir volumet:

$$V = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} 2\pi x(\sin x - \cos x)dx.$$

Ved å bruke delvis integrasjon finner vi at

$$\int x(\sin x - \cos x)dx = -x(\cos x + \sin x) + \sin x - \cos x + C.$$

Derfor blir

$$V = 2\pi[-x(\cos x + \sin x) + \sin x - \cos x]_{\pi/4}^{5\pi/4} = 3\sqrt{2}\pi^2.$$

**Oppgave 3** Den karakteristiske ligningen til differensialligningen blir

$$r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2 = 0.$$

Altså er $r = -1$ en reell dobbelrot, og den generelle løsningen av differensialligningen er på formen

$$y(t) = Ae^{-t} + Bte^{-t}.$$

Ved å bruke det første kravet får vi

$$1 = y(0) = Ae^0 + B \cdot 0 \cdot e^0 = A.$$

Videre er $y'(t) = -1e^{-t} + Be^{-t} - Bte^{-t}$, slik at

$$1 = y'(0) = -1 \cdot e^0 + Be^0 - B \cdot 0 \cdot e^0 = -1 + B \Leftrightarrow B = 2.$$

Den spesielle løsningen som tilfredsstiller kravene blir altså

$$y(t) = e^{-t} + 2te^{-t}.$$

**Oppgave 4** Grenseverdien er et ubestemt uttrykk på formen $[0^0]$. Et vanlig knep er da i stedet å se på:

$$\lim_{x\to 0+} \ln\left((\sin x)^{(1-\cos x)}\right) = \lim_{x\to 0+} (1 - \cos x)\ln \sin x$$

Vi kan beregne grenseverdien til høyre på følgende måte[1]:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+}(1-\cos x)\ln\sin x &= \lim_{x\to 0+}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)\ln\sin x}{1+\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0+}\frac{(1-\cos^2 x)\ln\sin x}{1+\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0+}\frac{(\sin^2 x)(\ln\sin x)}{1+\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0+}(\sin^2 x)(\ln\sin x)/2 \\
&= \lim_{y\to 0+} y^2\ln y/2 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Her byttet vi variabel $y = \sin x$ (som går mot 0 hvis og bare hvis $x$ gjørd det). Den siste overgangen er velkjent. (Power wins.)

Vi har altså at $\lim_{x\to 0+}\ln\left((\sin x)^{(1-\cos x)}\right) = 0$. Siden $e^x$ er en kontinuerlig funksjon får vi da

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+}\left((\sin x)^{(1-\cos x)}\right) &= \lim_{x\to 0+}\exp\left(\ln\left((\sin x)^{(1-\cos x)}\right)\right) \\
&= \exp\left(\lim_{x\to 0+}\ln\left((\sin x)^{(1-\cos x)}\right)\right) \\
&= \exp(0) = 1.
\end{aligned}
$$

**Oppgave 5**

**a)** Siden $e^{-t^2}$ er en kontinuerlig funksjon, sier analysens fundamentalsetning at $F$ er deriverbar, og at
$$F'(x) = e^{-x^2}.$$

**b)** Siden $F'(x) = e^{-x^2} > 0$ for $x \geq 0$, vet vi at $F$ er voksende for $x \geq 0$. Derfor har $F$ en inversfunksjon $F^{-1}$ definert i verdimengden til $F$.

**c)** Vi kan regne slik:
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{e^{-x^2}} = e^{x^2}.$$
Vi kan også sette $y = F(x), x = F^{-1}(y)$, slik at
$$\frac{d}{dy}F^{-1}(y) = \frac{1}{F'(F^{-1}(y))} = \frac{1}{F'(x)} = e^{x^2}.$$

[1] Det er også mulig å skrive om grenseverdien, slik at vi får den på formen $[\infty/\infty]$, og så bruke L'Hôpitals regel.