



Faglig kontakt: Heidi Dahl
Telefon: 91695300

Eksamen i fag MA1101/MA6101 Grunnkurs i analyse I

Bokmål

Tirsdag 14. desember 2010

Kl. 09.00-13.00

Sensur faller 14. januar 2011

Hjelpemidler: Kalkulator HP30S eller Citizen SR-270X,
vedlagte formelark for MA1101/MA6101.
Alle svar skal begrunnes. Lykke til!

Oppgave 1 Gitt funksjonen $f(x) = \ln x + \frac{1}{2x} - 1$, definert for $x > 0$.

- Finn alle ekstremalpunktene til f og avgjør hvor f er voksende og hvor f er avtagende. Har f noen vertikale eller horisontale asymptoter?
- Hvor mange nullpunkt har f ? (Husk å begrunne!)

Oppgave 2 Gitt funksjonen

$$h(x) = \begin{cases} x^3 + 2x + 4 & \text{for } x \geq 0 \\ Ax^2 + B & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

For hvilke verdier av A og B har h en inversfunksjon h^{-1} ? Finn den deriverte $(h^{-1})'(7)$.

Oppgave 3 Området under grafen til $f(x) = e^x \sqrt{\cos x} - 1$ og over linja $y = -1$, for $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, roteres om linja $y = -1$. Tegn figur og beregn volumet av legemet som fremkommer.

Oppgave 4 En nyttårsrakett blir skutt vertikalt opp fra et utskytingsstativ. Ei jente står 20 meter unna utskytingsstativet. I det raketten er 15 meter oppe i luften observerer hun at avstanden mellom raketten og henne øker med 0,75 meter per sekund. Hva er raketts vertikale hastighet i dette øyeblikket? (Du kan anta at bakken er horisontal og at alle målinger starter ved bakkenivå.)

Oppgave 5 Gitt funksjonen

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ 1 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

Finn $g'(0)$ og $g''(0)$ dersom de eksisterer.

Oppgave 6 Løs det ubestemte integralet

$$\int \frac{5x + 5}{(1 - x)(x^2 + 2x + 2)} dx$$

Oppgave 7

a) Løs differensiallikningen

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x} + 1} \quad (x > 0)$$

b) Finn den løsningen av differensiallikningen $y'' + 6y' + 9y = 0$ som har toppunkt i $(0, 2)$.

Oppgave 8 La f være en kontinuerlig og deriverbar funksjon på $[a, b]$. Anta at f' også er kontinuerlig på $[a, b]$. Vis at da finnes det en konstant K slik at

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

for alle $x, y \in [a, b]$.

FORMELARK FOR MA1101/MA6101

Ekspontialfunksjoner

Derivasjon: $(a^x)' = a^x \ln a$ spesielt $(e^x)' = e^x$
 Identiteter: $a^x a^y = a^{x+y}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $(a^x)^y = a^{xy}$

Logaritmefunksjonen

Derivasjon: $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$
 Identiteter: $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$ $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$
 $\ln(x^a) = a \ln x$ for $x, y > 0$

Trigonometriske funksjoner

Derivasjon: $(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$
 $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
 Identiteter: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
 $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
 $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
 $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$
 $\sin x = \pm \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$
 $\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$

Eksakte verdier:

v	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin v$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos v$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\tan v$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	—

Arcusfunksjoner

Derivasjon; $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
 $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Annenordens differensialligning

$$y'' + py' + qy = 0 :$$

$$y(x) = \begin{cases} Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x} & \text{hvis to reelle r\o tter } r_1 \neq r_2 \\ Ce^{rx} + Dxe^{rx} & \text{hvis \u00e9n reell rot } r \\ Ce^{ax} \cos(bx) + De^{ax} \sin(bx) & \text{hvis to komplekse r\o tter } r = a \pm ib \end{cases}$$