Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag, midtsemesterprøve i MA1101, 11. oktober 2011

Oppgave 1

a) $f(x) = \sqrt{2x^2+1}$. Bestem $f'(2)$.

Løsningsforslag:

$f'(x) = \frac{d}{dx}\sqrt{2x^2+1} = \frac{1}{2}\left(2x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4x = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}} \quad \Rightarrow \quad f'(2) = \frac{4}{\sqrt{8+1}} = \frac{4}{3}$

b) $\int \left(\sin x + x^2\right) dx =$

Løsningsforslag:

$\int \left(\sin x + x^2\right) dx = -\cos x + \frac{x^3}{3} + C$

c) $\int 2x \cos\left(x^2\right) dx =$

Løsningsforslag:

$\int 2x \cos\left(x^2\right) dx = \sin\left(x^2\right) + C$

Oppgave 2

a) Bevis at funksjonen

$$f(x) = 3x^3 + x - 1$$

er strengt voksende for alle x.

Løsningsforslag:

$f'(x) = 9x^2 + 1 \geq 1 > 0$ for alle x. Altså er f strengt voksende på $\mathbb{R}$.

b) Bevis at funksjonen f i **a)** har eksakt ett nullpunkt i intervallet $(0, 1)$.

Løsningsforslag:

Vi har $f(0) = -1 < 0$ og $f(1) = 3 + 1 - 1 = 3 > 0$. Ut fra skjæringssetningen finnes det minst et punkt $c \in (0, 1)$ slik at $f(c) = 0$, der vi har brukt at f er kontinuerlig i dette intervallet. Siden f er strengt voksende er $f(x) < 0$ for $x < c$ og $f(x) > 0$ for $x > c$. Altså har f bare dette ene nullpunktet.

Oppgave 3

Benytt den formelle definisjonen av grenseverdi/limes (med ϵ og δ) til å bestemme

$$\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{x^2 + 1}$$

Vis at man i dette eksempelet kan velge $\delta = \epsilon$.

Løsningsforslag:

Vi vil bevise at

$$\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{x^2 + 1} = 0 \qquad (*)$$

La $\epsilon > 0$ være gitt. Vi har da når $\delta = \epsilon$ at

$$\left| \frac{x - 2}{x^2 + 1} - 0 \right| = \frac{|x - 2|}{x^2 + 1} \leq |x - 2| < \epsilon$$

når $0 < |x - 2| < \delta = \epsilon$. Altså er (*) bevist.

Oppgave 4

Det oppgis her at:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(Bevis for denne likhet kreves ikke.)
Benytt denne formel til å bevise at:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

Løsningsforslag:

Vi har fått oppgitt:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Derivasjon gir:

$$-2\sin 2x = -2\cos x \sin x - 2\sin x \cos x$$

eller

$$\sin 2x = \cos x \sin x + \sin x \cos x = 2\sin x \cos x$$

Oppgave 5

a) Skriv opp sekant-setningen (the Mean-Value Theorem). (Bevis kreves ikke.)

Løsningsforslag:

Anta at $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ er kontinuerlig og at $f'(x)$ eksisterer for alle $x \in (a, b)$. Da finnes det et punkt $c \in (a, b)$ slik at

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

b) Anta at funksjonen f er definert og deriverbar i det åpne intervallet (a, b) og at

$$f'(x) < 0 \quad \text{for alle} \quad x \in (a, b)$$

Benytt sekantsetningen til å bevise at f da er strengt avtagende i (a, b), d.v.s. hvis $x_1 < x_2$ så er $f(x_1) > f(x_2)$.

Løsningsforslag:

Vi antar at f er deriverbar i (a, b). La $a < x_1 < x_2 < b$. Siden deriverbarhet impliserer kontinuitet, vil f oppfylle betingelsene i sekantsetningen i $[x_1, x_2]$. Vi har dermed:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

for et $c \in (x_1, x_2)$. Siden $f'(c) < 0$ må da $f(x_2) < f(x_1)$ siden $x_2 - x_1 > 0$. Altså er f strengt avtagende i (a, b).

c) Bestem om følgende utsagn er riktig: Dersom f er deriverbar i et åpent intervall, og strengt avtagende i dette intervallet, så må $f'(x) < 0$ for alle x i intervallet. Gi et bevis eller et moteksempel.

Løsningsforslag:

Nei, utsagnet holder ikke. Vi har følgende moteksempel: $f(x) = -x^3$ er strengt avtagende i ethvert intervall som inneholder 0, men $f'(0) = 0$.

Oppgave 6

Det finnes to tangenter til parabelen

$$y = x^2$$

som går gjennom punktet $(1, -8)$. Bestem ligningen til disse tangentene.

Løsningsforslag:

Vi setter berøringspunktene $P = (a, a^2)$ med stigningstall $k = 2a$. Vi har da sammenhengen:

$$\frac{a^2 + 8}{a - 1} = 2a$$

eller

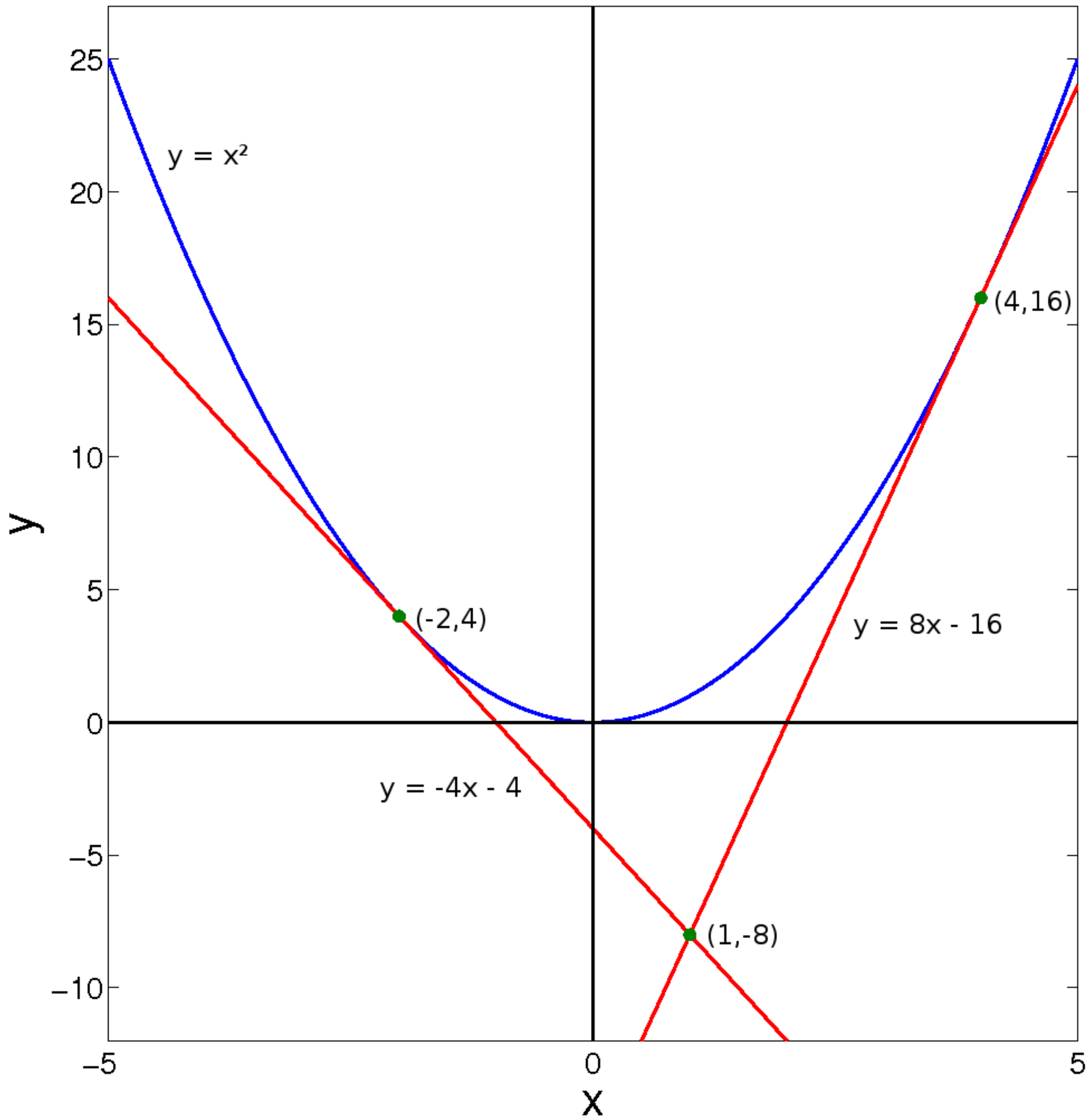
$$\begin{aligned} a^2 + 8 &= 2a^2 - 2a \\ 0 &= a^2 - 2a - 8 = (a+2)(a-4) \\ a = -2 \quad &, \quad a = 4 \end{aligned}$$

Insetting av de tilhørende k-verdiene og det oppgitte punktet i ligningene for en rett linje gjennom et punkt med gitt stigningstall gir de to tangentligningene:

$$y + 8 = -4(x - 1) \iff y = -4x - 4 \tag{1}$$

$$y + 8 = 8(x - 1) \iff y = 8x - 16 \tag{2}$$

En figur av løsningen er vist nedenfor.



y = x²
(4,16)
(-2,4)
y = 8x - 16
y = -4x - 4
(1,-8)
25
20
15
10
5
0
−5
−10
−5
0
5
y
x