LØSNINGER h. 2003, MA1101

#1:

(a)
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1-\sin^2 x) - \sin^2 x$$
$$= 1 - 2\sin^2 x \quad \therefore \quad \sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

(b)
$$\int x \sin^2 x\, dx = \tfrac{1}{2}\int x(1-\cos 2x)\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{x^2}{2} - \int x\cos 2x\,dx\right] = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{x^2}{2} - \left(\tfrac{1}{2}x\sin 2x - \tfrac{1}{2}\int \sin 2x\,dx\right)\right]$$
$$= \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \sin 2x\,dx =$$
$$= \underline{\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + K}$$

Derivasjonstest: $\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x\right]$
$$= \left[\frac{x}{2} - \cancel{\frac{1}{4}\sin 2x} - \frac{x}{2}\cos 2x + \cancel{\frac{1}{4}\sin 2x}\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[x(1-\cos 2x)\right]$$

#2:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x-\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1 - 1/\cos^2 x}{1-\cos x}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x(1-\cos x)} = -\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x} = \underline{\underline{-2}}$$

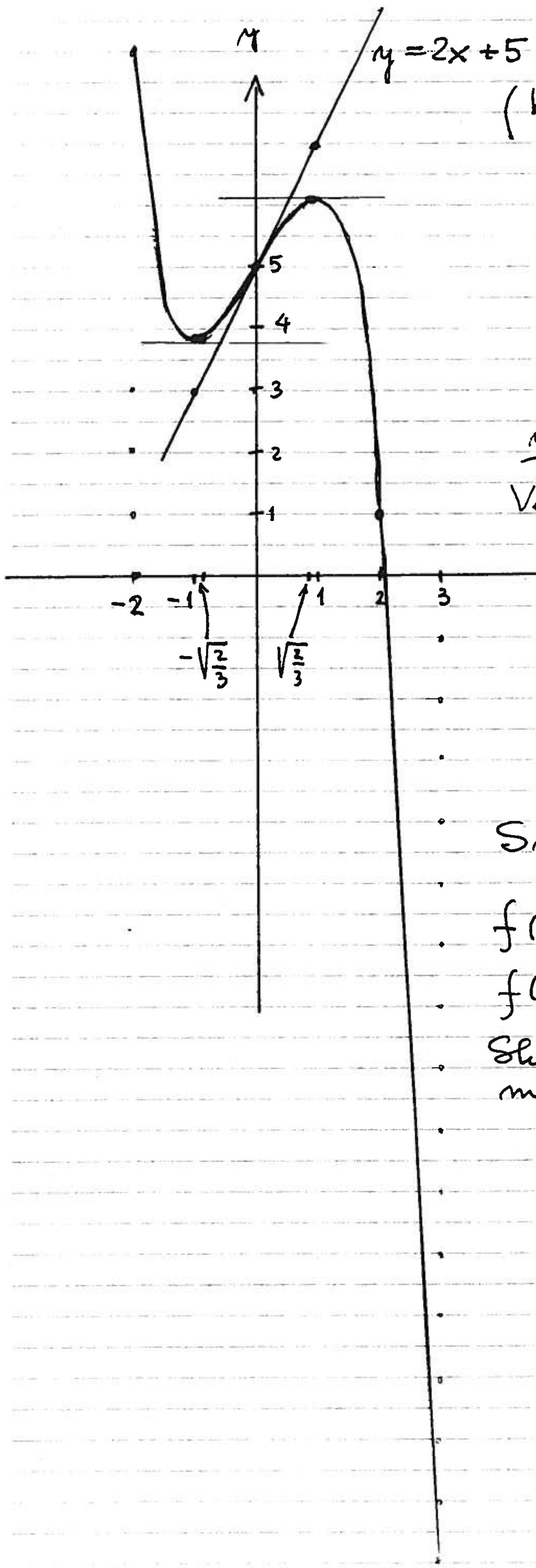
#3:

(a) $y' = 2 - 3x^2$

Ser straks at $y'_{maks} = 2$ når $x = 0$

$x = 0$ gir $y = 5 + 2\cdot 0 - 0^3 = 5$

Ligningen for tangenten med størst stigningstall blir dermed
$$y - 5 = 2(x-0) \quad \text{eller}$$
$$\underline{y = 2x+5}$$



(b) $y' = 0$ når $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \approx \pm 0.816$

$y' < 0$ når $|x| > \sqrt{\frac{2}{3}}$

$y' > 0$ når $|x| < \sqrt{\frac{2}{3}}$

$y\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \approx 6.086$

$y\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \approx 3.92$

$\underline{y'' = -6x}$ Konkav oppover for $x < 0$

Vendep. i $(0,5)$ Konkav nedover for $x > 0$

$$\lim_{x \to \infty} (5 + 2x - x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (5 + 2x - x^3) = \infty$$

Symmetri om $(0,5)$

$f(2) = 5 + 4 - 8 = 1 > 0$

$f(3) = 5 + 6 - 27 = -16 < 0$

Skjæring med x-aksen mellom 2 og 3.

#4:

(a) $$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx =$$

Vi setter $u = \sqrt{x}$ og får: $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$$= \int \sin u \, du$$

$$= -\cos u + K = -\cos\sqrt{x} + K$$

$$\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx = -\cos\pi + \cos\frac{\pi}{2} = \underline{1}$$

(b) $G'(x) = e^{-(3x)^2}\cdot 3 = \underline{3e^{-9x^2}}$

#5:

(a) Vi må studere hver for seg:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{(x^2+2)-2}{x} = \lim_{x\to 0+} x = 0$$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{(-x^2+2)-2}{x} = \lim_{x\to 0-}(-x) = 0$$

Altså har vi $f'(0)$ eksisterer og er lik 0. M.a.o.: <u>$x=0$ er et kritisk punkt til funksjonen.</u>

Vi har $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$, $x > 0$ og vi har $f'(x) = -2x$, $f''(x) = -2$; $x < 0$. Altså skifter den 2. deriverte fortegn i $x = 0$, grafen har horisontal tangent i $(0,2)$. <u>M.a.o.: f har et vendepunkt i $x = 0$</u>

(b) Vi skal avgjøre om det faktum at f har vendepunkt i $x = x_0$, og dessuten har tangent i $(x_0, f(x_0))$ som ikke er vertikal, medfører at $f''(x_0)=0$.

Ser vi på funksjonen i (a), har vi:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{2x-0}{x} = \lim_{x\to 0+} 2 = 2$$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{-2x-0}{x} = \lim_{x\to 0-}(-2) = -2$$

Altså vil $f''(0)$ ikke eksistere i dette eksemplet, samtidig som f har et vendepunkt i $(0,2)$ og horisontal tangent i punktet. Svaret på spørsmålet er derfor NEI!

(c) Vi antar nå igjen at $x = x_0$ er et vendepunkt for $y = f(x)$ og dessuten at $f''(x_0)$ eksisterer. Kan vi da slutte at $f''(x_0) = 0$?

Vi har f.eks. at $f''(x) > 0$ for $x \in]x_0, x_0+\delta_1[$, mens $f''(x) < 0$ for $x \in]x_0-\delta_2, x_0[$ (Det "motsatte" tilfellet diskuteres helt analogt!) Vi har da:

$$(*) \quad \lim_{x\to x_0+} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to x_0+} f''(c_1) \geq 0$$

$(x_0 < c_1 < x)$

siden $f''(x) > 0$ for $x > x_0$ pr. antagelse.

Tilsvarende

$$(**) \quad \lim_{x\to x_0-} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} \overset{(**)}{=} \lim_{x\to x_0-} f''(c_2) \leq 0$$

$(x < c_2 < x_0)$

I $\circledast$ og $\circledast\circledast$ benyttes sekantsetningen. Vi har nemlig at f' er deriverbar på hele $]x_0 - \delta_2, x_0 + \delta[$. Derfor kan sekantsetningen benyttes på hvert av intervallene $[x_0 - \delta_2', x_0]$ der $0 < \delta_2' < \delta^2$ og $[x_0, x_0 + \delta_1']$ der $0 < \delta_1' < \delta_1$.

Siden $f''(x_0)$ er antatt å eksistere, må spesielt de ensidige grensene $(\star)$ og $(\star\star)$ eksistere, følgelig må også

$$\lim_{x \to x_0+} f''(c_1) \quad \text{og} \quad \lim_{x \to x_0-} f''(c_2) \quad \text{eksistere.}$$

$(x_0 < c_1 < x)$ $\qquad$ $(x_0 < c_2 < x)$

Antagelsene $f''(x) > 0$ for $x \in]x_0, x_0 + \delta_1[$ og $f''(x) < 0$ for $x \in]x_0 - \delta, x_0[$ sikrer oss at

$$\lim_{x \to x_0+} f''(c_1) \geq 0 \quad , \quad \lim_{x \to x_0-} f''(c_2) \leq 0$$

Men siden $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$ eksisterer pr. antagelse, gir

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

og

$$\lim_{x \to x_0-} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

at $f''(x_0) = 0$.