Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag MA1101/MA6101 Grunnkurs i analyse I

Eksamen Tirsdag 14.desember 2010

Oppgave 1 Gitt funksjonen $f(x) = \ln x + \frac{1}{2x} - 1$, definert for $x > 0$.

a) Finn alle ekstremalpunktene til f og avgjør hvor f er voksende og hvor f er avtagende. Har f noen vertikale eller horisontale asymptoter?

Løsningsforslag: Ekstremalpunkt kan vi ha i endepunkt av definisjonsmengden, singulære punkt (der $f'(x)$ ikke eksisterer) og i kritiske punkt (der $f'(x) = 0$). Siden f er definert på $(0, \infty)$ har vi ingen endepunkt. Vi deriverer for å sjekke kritiske og eventuelle singulære punkt.

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} = \frac{2x-1}{2x^2}$$

Vi ser at $f'(x)$ eksisterer for alle x i definisjonsmengden, så vi har ingen singulære punkt. Videre ser vi at $f'(x) = 0$ for $x = \frac{1}{2}$, så $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2})) = (\frac{1}{2}, -\ln(2))$ er eneste krititiske punkt. Hvis vi drøfter fortegnet til f' (for eksempel på et fortegnsskjema), ser vi at $f'(x) < 0$ for $x \in (0, \frac{1}{2})$ og $f'(x) > 0$ for $x \in (\frac{1}{2}, \infty)$. Vi konkluderer med at f har bunnpunkt i $(\frac{1}{2}, -\ln(2))$, og at f er avtagende på $(0, \frac{1}{2}]$ og voksende på $[\frac{1}{2}, \infty)$.

Siden f er en kontinuerlig funksjon, er eneste mulighet for vertikal asymptote $x = 0$. Vi sjekker derfor grenseverdien av f når x går mot 0:

$$\underbrace{\lim_{x\to 0} (\ln x + \frac{1}{2x} - 1)}_{(*)} \overset{[-\infty+\infty]}{=} \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{2x\ln x + 1}{2x}}_{(**)} - 1 \overset{[\frac{0+1}{0}]}{=} \infty$$

Ved $(*)$ har vi et utrykk på formen $[-\infty + \infty]$, som er ubestemt, så vi omformer til en brøk.

Det er ikke opplagt hva leddet $2x \ln x$ i telleren i brøken går mot, så ved $(**)$ har vi foretatt følgende mellomregning:

$$\lim_{x\to 0} 2x\ln x \overset{[0\cdot -\infty]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{[\frac{-\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} -2x = 0$$

(Ved $[\frac{-\infty}{\infty}]$ er L'Hopitals regel benyttet.)

Siden $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ konkluderer vi med at $\underline{x = 0 \text{ er vertikal asymptote}}$.

Vi sjekker for horisontal asymptote ved å se hva som skjer når x går mot uendelig:

$$\lim_{x\to\infty} (\ln x + \frac{1}{2x} - 1) = \infty$$

Konkluderer med at f ikke har noen horisontal asymptote.

b) Hvor mange nullpunkt har f? (Husk å begrunne!)

Løsningsforslag: Fra *a)* vet vi at $f(\frac{1}{2}) = -\ln 2 < 0$. Siden både $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ og $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, og f i tillegg er kontinuerlig, vet vi fra skjæringssetningen at f må ha minst ett nullpunkt på intervallet $(0, \frac{1}{2}]$ og ett nullpunkt på intervallet $[\frac{1}{2}, \infty)$. Siden f er avtagende på intervallet $(0, \frac{1}{2}]$ og økende på intervallet $[\frac{1}{2}, \infty)$ kan f ha maksimalt ett nullpunkt på hvert av intervallene. Konklsjonen må være at f har nøyaktig to nullpunkt.

(Skjæringssetningen forutsetter at vi befinner oss på *lukkede* intervall, så om vi skal være omstendelige bør vi finne et punkt $a \in (0, \frac{1}{2})$ hvor $f(a) > 0$ og argumentere for at f har ett nullpunkt på intervallet $[a, \frac{1}{2}]$ og ingen nullpunkt på intervallet $(0, a)$.)

Oppgave 2 Gitt funksjonen

$$h(x) = \begin{cases} x^3 + 2x + 4 & \text{for } x \geq 0 \\ Ax^2 + B & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

For hvilke verdier av A og B har h en inversfunksjon h^{-1}? Finn den deriverte $(h^{-1})'(7)$.

Løsningsforslag: En funksjon har en invers dersom den er en-til-en. Vi ser at for $x \geq 0$ er funksjonen definert som $h_1(x) = x^3+2x+4$. Dette er en voksende, kontinuerlig funksjon (her er $h_1'(x) = 3x^2+2$ for $x > 0$, som er alltid er positiv). Vi har $h(0) = 4$ og $\lim_{x\to\infty} h(x) = \infty$, så for $x \geq 0$ antar h alle verdier i intervallet $[4, \infty)$. Dermed må vi velge A og B slik at $h_2(x) = Ax^2+B$ (definert for $x > 0$) bare antar verdier *mindre enn* 4. Siden $\lim_{x\to 0^-} Ax^2 + B = B$, må vi velge

$B \leq 4$. Vi kan bestemme A ved å se på ulikheten $Ax^2 + B \leq 4$, som gir $Ax^2 \leq 4 - B$, som må gjelde for alle $x < 0$. Men siden x^2 kan bli vilkårlig stor, er dette bare mulig dersom $A \leq 0$. Konkluderer dermed med at $\underline{h \text{ har en invers når } A \leq 0 \text{ og } B \leq 4}$.

For å finne $(h^{-1})'(7)$ kan vi benytte sammenhengen $(h^{-1})'(y) = \frac{1}{h'(x)}$. Da trenger vi å finne x slik at $h(x) = 7$. Ved inspeksjon ser vi at $h(1) = 1 + 2 + 4 = 7$. Dermed er $\underline{h^{-1})'(7) = \frac{1}{h'(1)} = \frac{1}{5}}$.

Oppgave 3 Området under grafen til $f(x) = e^x\sqrt{\cos x} - 1$ og over linja $y = -1$, for $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, roteres om linja $y = -1$. Tegn figur og beregn volumet av legemet som fremkommer.

Løsningsforslag: Velger skivemetoden for å finne volumet. Rotasjonslegemet deles da opp i sirkulære skiver vinkelrett på rotasjonsaksen (som er parallell med x-aksen.) Radien i en skive måles fra linja $y = -1$ opp til grafen $f(x)$, slik at vi får $r(x) = 1 + f(x) = e^x\sqrt{\cos x}$. Volumet blir dermed $V = \int_{x=0}^{\pi/2} \pi r(x)^2\, dx = \pi \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x\, dx$. Benytter delvis integrasjon (to ganger) og trikset med å flytte over og løse som likning for å løse integralet:

$$\begin{aligned}
\int e^{2x}\cos x\, dx &= e^{2x}\sin x - \int 2e^{2x}\sin x\, dx \\
&= e^{2x}\sin x - (2e^{2x}(-\cos x) - \int 4e^{2x}(-\cos x)\, dx) \\
&= e^{2x}(\sin x + 2\cos x) - 4\int e^{2x}\cos x\, dx \\
5\int e^{2x}\cos x\, dx &= e^{2x}(\sin x + 2\cos x) + 5C \\
\int e^{2x}\cos x\, dx &= \tfrac{1}{5}e^{2x}(\sin x + 2\cos x) + C
\end{aligned}$$

Nå finner vi volumet

$$V = \int_{x=0}^{\pi/2} \pi r(x)^2\, dx = \pi \int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\, dx = \frac{\pi}{5}[e^{2x}(\sin x + 2\cos x)]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{5}(e^{\pi} - 2)$$

Oppgave 4 En nyttårsrakett blir skutt vertikalt opp fra et utskytingsstativ. Ei jente står 20 meter unna utskytingsstativet. I det raketten er 15 meter oppe i luften observerer hun at avstanden mellom raketten og henne øker med 0,75 meter per sekund. Hva er rakettens vertikale hastighet i dette øyeblikket? (Du kan anta at bakken er horisontal og at alle målinger starter ved bakkenivå.)

Løsningsforslag: Det kan være greit å tegne en figur her. Vi får en rettvinklet trekant med utskytningsstativet i hjørnet med den rette vinkelen, og jenta og raketten i de to andre hjørnene. Kateten mellom utskytningsstativet og jenta er konstant 20 meter lang. Kateten mellom utskytningsstativet og raketten kaller vi $x = x(t)$, og denne øker sålenge raketten beveger seg oppover.

Hypotenusen i trekanten kaller vi $y = y(t)$. Vi kjenner endringen i y, som er $y'(t) = 0,75$ meter per sekund. Pytagoras gir oss en generell sammenheng mellom x og y, nemlig $y^2 = x^2 + 20^2$. Derviverer denne sammenhengen med hensyn på tiden t og får

$$2y \cdot y'(t) = 2x \cdot x'(t) \; (*)$$

Ved vårt aktuelle tidspunkt har vi $x = 15$, og vi finner $y = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$. Setter inn i likningen $(*)$ og løser for $x'(t)$:

$$x'(t)|_{x=15} = \frac{y}{x} \cdot y'(t)|_{x=15} = \frac{25}{15} \cdot 0,75 = \frac{5}{4}$$

Konkluderer med at farten til raketten er $1,25$ meter per sekund.

Oppgave 5 Gitt funksjonen

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ 1 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

Finn $g'(0)$ og $g''(0)$ dersom de eksisterer.

Løsningsforslag: Før vi forsøker å finne den deriverte $g'(0)$ kan det være greit å sjekke om g er kontinuerlig for $x = 0$. Siden $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = g(0)$ er g kontiuerlig. Vi har delt forskrift ved $x = 0$, så vi bruker definisjonen av derivert e for å (om mulig) bestemme $g'(0)$:

$$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sin h}{h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h - h}{h^2} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{2h} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{h\to 0} \frac{-\sin h}{2} = 0$$

Dermed eksisterer $g'(0)$ og er lik 0. For å finne $g''(0)$ trenger vi å kjenne $g'(x)$ for x nær 0 også. Vi deriverer og finner $g'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ for $x \neq 0$. Dermed kan vi beregne $g''(0)$:

$$g''(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g'(0+h) - g'(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h\cos h - \sin h}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\cos h - \sin h}{h^3}$$

$$\overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - h\sin h - \cos h}{3h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{-h\sin h}{3h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{-\sin h}{3h} \overset{(*)}{=} -\frac{1}{3}$$

Ved $[\frac{0}{0}]$ er L'Hopitals regel benyttet, og ved $(*)$ er den kjente grenseverdien $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ benyttet. Vi konkluderer med at <u>også $g''(0)$ eksisterer, og denne er lik $\frac{1}{3}$.</u>

Oppgave 6 Løs det ubestemte integralet

$$\int \frac{5x+5}{(1-x)(x^2+2x+2)}\,dx$$

Løsningsforslag: Her må vi delbrøkoppspalte integranden før vi integrerer. Telleren er av lavere grad enn nevneren, så det er ikke nødvendig å foreta noen polynomdivisjon først. Nevneren består at en lineær faktor $(1-x)$ og en ufaktoriserbare kvadratisk faktor (x^2+2x+2), begge med multiplisitet 1. Vi spalter derfor opp i to ledd.

$$\begin{aligned}
\tfrac{A}{1-x} + \tfrac{Bx+C}{x^2+2x+2} &= \tfrac{5x+5}{(1-x)(x^2+2x+2)} \\
A(x^2+2x+2) + (Bx+C)(1-x) &= 5x+5 \\
(A-B)x^2 + (2A+B-C)x + (2A+C) &= 5x+5
\end{aligned}$$

Ser at om dette skal stemme for *alle* x, må vi ha $A-B=0$, $2A+B-C=5$ og $2A+C=5$, som har løsning $A=2$, $B=2$ og $C=1$.

Så kan vi integrere:

$$\int \frac{5x+5}{(1-x)(x^2+2x+2)}\,dx = \int \frac{2}{1-x} + \frac{2x+1}{x^2+2x+2}\,dx = -2\ln|1-x| + \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} - \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$$

$$= \ln|1-x|^{-2} + \ln(x^2+2x+2) - \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx = \ln\frac{x^2+2x+2}{(1-x)^2} - \arctan(x+1) + C$$

Her har vi brukt ulike substitusjoner underveis. Legg også merke til hvordan vi "smugler" den deriverte av (x^2+2x+2) inn i telleren på brøken.

Oppgave 7

a) Løs differensiallikningen

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x}+1} \qquad (x>0)$$

Løsningsforslag: Dette er en differensiallikning som er både separabel og lineær. Velger å løse den som separabel. (Å løse som lineær gir så og si samme utregninger i dette tilfellet.)

$$
\begin{aligned}
y' &= \tfrac{y}{\sqrt{x}+1} \\
\tfrac{1}{y}y' &= \tfrac{1}{\sqrt{x}+1} \qquad\qquad (y \neq 0) \\
\int \tfrac{1}{y}\,dy &= \int \tfrac{1}{\sqrt{x}+1}\,dx \\
\ln|y| &\overset{(*)}{=} \int \tfrac{1}{u}\cdot 2(u-1)\,du \\
\ln|y| &= 2\int 1-\tfrac{1}{u}\,du \\
\ln|y| &= 2(\sqrt{x}+1-\ln(\sqrt{x}+1))+C \\
|y| &= e^{2(\sqrt{x}+1-\ln(\sqrt{x}+1))+C} \\
y &\overset{(**)}{=} \tfrac{D}{(\sqrt{x}+1)^2}\,e^{2\sqrt{x}+2}
\end{aligned}
$$

Ved $(*)$ har vi brukt substitusjonen $u = \sqrt{x}+1$, som gir $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2(u-1)}$. Ved $(**)$ kan vi i utgangspunktet bare ha $D \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, men vi ser fra utgangslikningen at også $y = 0$ er en løsning, dermed kan konstanten D velges blandt alle de reelle tall.

b) Finn den løsningen av differensiallikningen $y'' + 6y' + 9y = 0$ som har toppunkt i $(0,2)$.

Løsningsforslag: Dette er en annenordens lineær, homogen differensiallikning med konstante koeffisienter. Den karakteristiske likningen er $r^2+6r+9=0$, som har $r=-3$ som dobbeltrot. Dermed er den genrelle løsningen $y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x}$. For å bestemme C_1 og C_2 benytter vi at $y(0) = 2$ og $y'(0) = 0$ (siden vi skal ha et toppunkt for $x = 0$). $y(0) = C_1$, så vi må ha $C_1 = 2$. Deriverer vi, finner vi $y'(x) = -3C_1e^{-3x} + C_2e^{-3x} - 3C_2xe^{-3x}$. Setter vi nå $C_1 = 2$ og krever $y'(0) = 0$ finner vi at $C_2 = 6$. Drøfter vi i tillegg y' på et fortegnsskjema, finner vi at $(0,2)$ blir et *toppunkt* og ikke et bunnpunkt. Den ønskede løsningen er derfor $\underline{y(x) = 2e^{-3x} + 6xe^{-3x}}$.

Oppgave 8 La f være en kontinuerlig og deriverbar funksjon på $[a,b]$. Anta at f' også er kontinuerlig på $[a,b]$. Vis at da finnes det en konstant K slik at

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|$$

for alle $x, y \in [a,b]$.

Løsningsforslag: La x og y være to punkt i $[a, b]$. Dersom $x > y$, se på intervallet $[y, x]$. Da er f kontinuerlig og deriverbar på $[y, x]$, så vi kan bruke sekantsetningen og få

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c)$$

for en $c \in (y, x)$. Tar absoluttverien på begge sider og multipliserer opp med $|x - y|$ for å oppnå

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y|$$

Vi ser at vi får samme utrykk dersom vi antar $y > x$ og bruker sekantsetningen på intervallet $[x, y]$. Siden f' er kontinuerlig på $[a, b]$ har den i følge maks-min-teoremet både en maksimumsverdi f'_{maks} og en minimumsverdi f'_{min}. La $K = \text{maks}\{|f'_{\text{maks}}|, |f'_{\text{min}}|\}$. Da er $|f'(c)| \leq K$, slik at vi oppnår den ønskede ulikheten

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$