LØSNINGSFORSLAG

EKSAMEN MA1101/MA6101

Vår 2004:

OPPG 1:

(i) $\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int 1\cdot\sin x\,dx$

$= \underline{x\sin x + \cos x + K}$

(ii) $\int 2xe^{x^2}dx$

Vi substituerer her: $u = x^2$; får $du = 2x\,dx$

$= \int e^u du = e^u + K = \underline{e^{x^2} + K}$

(iii) $\int 2x^3(x^2+1)^{-1/2}dx$

Vi substituerer her: $u = x^2+1$; får $du = 2x\,dx$ og $x^2 = u-1$.

$= \int x^2(x^2+1)^{-1/2}\cdot 2x\,dx$

$= \int (u-1)u^{-1/2}du$

$= \int (u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}})du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} + K$

$= \frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} - 2(x^2+1)^{1/2} + K$

$= (x^2+1)^{\frac{1}{2}}[\frac{2}{3}(x^2+1) - 2] + K = \sqrt{x^2+1}\,(\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}) + K$

$\int_0^4 2x^3(x^2+1)^{-1/2}dx = \sqrt{x^2+1}\,(\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3})\Big|_0^4$

$= \sqrt{17}\,(\frac{32}{3} - \frac{4}{3}) - 1(-\frac{4}{3}) = \underline{\frac{28}{3}\sqrt{17} + \frac{4}{3}}$

OPPG. 2:

(a) Funksjonen vokser der $f'(x) > 0$:

$f'(x) = 1 - 2\sin x$; $2\sin x < 1$

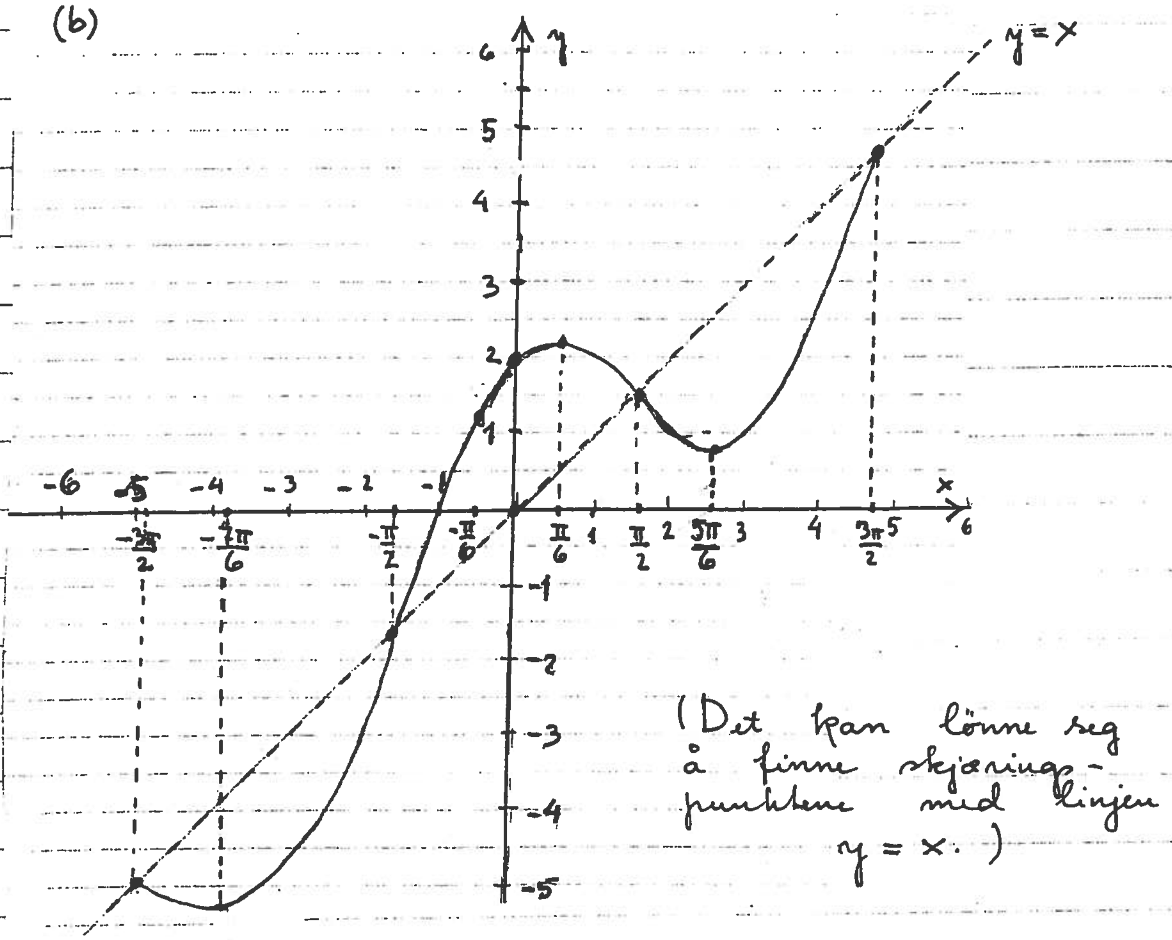
eller $\sin x < \frac{1}{2}$ ($\sin x = \frac{1}{2}$ for $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \dots$)

Dette gir at f er voksende for:

$\underline{-\frac{7\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ; } k \text{ heltallig.}}$

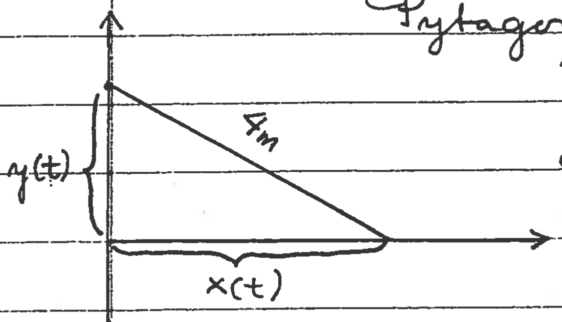
Eks. MA1101/MAG101, vår 2004 (forts.):

(b)



(Det kan lönne seg å finne skjæringspunktene med linjen $y = x$.)

OPPG.3:



Pytagoras gir: $x(t)^2 + y(t)^2 = 16$

Implisitt derivasjon m.h.p. t gir:

$$2x(t)\cdot x'(t) + 2y(t)\cdot y'(t) = 0$$

eller:

$$y'(t) = -\frac{x(t)}{y(t)}\cdot x'(t)$$

Har at $x'(t) = 1/2$ m/sek. I tidspunktet $t = t_0$ er $y(t_0) = 2$ m. Pytagoras gir da:

$$x(t_0) = \sqrt{16 - y(t_0)^2} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Dette gir da:

$$y'(t_0) = -\frac{x(t_0)}{y(t_0)}\, x'(t_0) = -\frac{2\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \underline{-\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{m/sek}}$$

Eks. MA1101/MA6101, vår 2004 (forts.)

OPPG. 4:

Implisitt derivasjon m.h.p. x gir:

$$2xy^3 + 3x^2y^2y' - 3x^2y^2 - 2x^3yy' = 0$$

$$y'(3x^2y^2 - 2x^3y) = 3x^2y^2 - 2xy^3$$

$$y' = \frac{3x^2y^2 - 2xy^3}{3x^2y^2 - 2x^3y} = \frac{3xy - 2y^2}{3xy - 2x^2}$$

For $x = 1, y = 2$ gir dette: $y' = \frac{6-8}{6-2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

Tangentens ligning i $(1,2)$ blir derfor:

$\underline{y - 2 = -\frac{1}{2}(x-1)}$ eller $\underline{y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}}$

OPPG. 5:

(a) Vi antar som kjent at:

$$\lim_{t\to\infty} 1/e^t = 0$$

Vi ser på:

$$\lim_{t\to\infty} t^n/e^t = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = (\text{L'Hôpitals regel})$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{n t^{n-1}}{e^t}$$ (Hvis $n=1$, følger det straks at $\lim_{t\to\infty} \frac{n}{e^t} = 0$

Hvis $n > 1$ fortsetter vi derivasjonen:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{n t^{n-1}}{e^t} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{t\to\infty} \frac{n(n-1)\,t^{n-2}}{e^t}$$

Hvis $n = 2$, får vi: $\lim_{t\to\infty} \frac{n(n-1)}{e^t} = 0$.

Hvis $n > 2$, gjentaes prosessen. Dette kan gjennomføres som et induksjonsbevis! Konklusjon:

$$\lim_{t\to\infty} t^n/e^t = 0$$

for hvert naturlig tall n.

Eks. MA1101/MA6101, vår 2004 (forts.)

(b) Ut fra definisjonen følger det direkte at f er kontinuerlig for alle $x \neq 0$. Det gjenstår å bevise at:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

Vi ser straks at

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = 0 = f(0)$$

Vi har dessuten:

$$\lim_{x\to 0+} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{t\to\infty} 1/e^t = 0 = f(0)$$

Altså:

$$\underline{\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)}$$

(c) For $\underline{x<0 \text{ er } f(x) \equiv 0}$ og dermed $f'(x) \equiv 0$.

For $\underline{x>0 \text{ er } f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}}$ (vanlig regel!)

For $x = 0$ har vi:

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{0-0}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}-0}{x} = \lim_{t\to\infty} t/e^t = 0 \text{ (fra (a))}$$

Altså: $\underline{f'(0)} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} \underline{= 0}$

Det er opplagt at $\lim_{x\to 0-} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{0-0}{x} = 0$

Videre har vi:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}-0}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3} = \lim_{t\to\infty} t^3 e^{-t} = \underline{0} \text{ ut fra (a).}$$

Altså er $\underline{f''(0) = 0.}$

OPPG. 6:

Se vedlagt ark.

STUDENTNUMMER:

Dette arket skal besvares og leveres inn.

Oppgave 6

I denne oppgaven kreves ikke begrunnelse. Det skal bare krysses av R (riktig) eller G (galt) i rutene til høyre. (Galt svar gir ikke negative "score".)

(i) Hvis funksjonen f er deriverbar i $x = x_0$, så er den kontinuerlig i $x = x_0$. ☐ R

(ii) Hvis funksjonen f er kontinuerlig i $x = x_0$ så er den deriverbar i $x = x_0$. ☐ G

(iii) Hvis funksjonen f er avtagende på hele $\mathbb{R}$, så må $f'(x) < 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$. ☐ G

(iv) Hvis $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig, så er f integrerbar på $[a,b]$. ☐ R

(v) Funksjonen gitt ved:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

er deriverbar i $x = 0$. ☐ G

(vi) Funksjonen

$$f(x) = \sin x \; ; \; 0 \leq x \leq \pi$$

har en invers funksjon f^{-1} på $[0,1]$. ☐ G

(i) Velkjent teorem fra pensum!

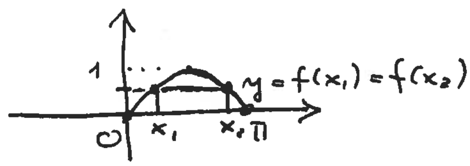
(ii) Moteks.: $f(x) = |x|$ for $x_0 = 0$.

(iii) En avtagende funksjon trenger ikke være deriverbar for alle $x \in \mathbb{R}$. Om den er det, vil $f(x) = -x^3$ gi moteksempel for $x = 0$.

(iv) Velkjent teorem fra pensum!

(v) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ eksisterer ikke.

(vi) $\left.\begin{array}{l} f(x) = \sin x \\ 0 \leq x \leq \pi \end{array}\right\}$ har grafen :



Denne funksjonen er ikke injektiv (1-1) – og har derfor ikke invers på dette intervallet.