Noregs teknisk-naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Fagleg kontakt under eksamen:
Førsteamanuensis Per Hag, Telefon: 91743

MA1101 Grunnkurs i analyse I

Nynorsk
Torsdag 9. juni 2005
Kl. 9-13
Hjelpemiddel: Godkjent kalkulator (HP30S)
Sensur: 30. juni 2005

Oppgåvene 1 - 4: Svarane skal grunngjevast. Mellomrekning skal med i løysinga. Oppgåve 5: Det skal her kryssast av R eller G. Ytterlegare grunngjeving krevst ikkje. Arket med oppgåve 5 skal leverast saman med løysinga av oppgåvene 1-4.

(Kvar av dei 5 oppgåvene har same vekt.)

Oppgåve 1

a) Avgjer om grenseverdien:

$$\lim_{x\to 1} \frac{(1-x)^{2/3}}{x-1}$$

eksisterer

b) Funksjonen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er gitt ved:

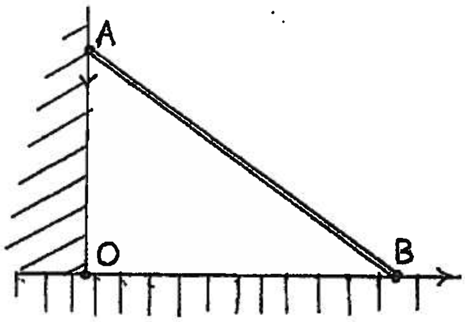
$$f(x) = (1-x)^{2/3}$$

Avgjer om f er deriverbar i $x = 1$ og finn $f'(x)$ der denne deriverte eksisterer.

c) Lag ei skisse av funksjonen i (b) der eventuelle lokale og absolutte ekstrema avmerkast. Like eins skal monotonitetseigenskapar og symmetrieigenskapar framgå av skissa.

Oppgåve 2

Toppen av ein 10 meter lang stolpe AB støttar seg mot ein vertikal vegg. Stolpen sitt nedste punkt B rører seg bort frå det nedste punktet av veggen med ein konstant hastighet på 1/3 meter/sekund slik at det øvste punktet A rører seg loddrett nedover langs veggen. Kor fort rører punkt A seg når dette punktet er 6 meter over bakken?



Oppgåve 3

Rekn ut integrala

a)

$$\int x^2 \cos x dx$$

b)

$$\int_1^3 \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}dx$$

Oppgåve 4

a) Skriv opp sekant-setninga (Mean-Value Theorem). Bevis krevst ikkje. Lag ei skisse som illustrerer innhaldet av dette teoremet.

b) Gje eksempel som viser at ingen av førsetnadene:

(i) f er kontinuerleg på $[a, b]$

(ii) f er deriverbar i $]a, b[$

kan utelatast.

STUDENTNUMMER:

Dette arket skal besvarast og leverast inn.

Oppgåve 5

Merk av R (rett) eller G (galt) i ruta til høgre. Her krevst inga grunngjeving.

(i) Hvis $f'(x_0)$ eksisterer, så må f vere kontinuerleg i $x = x_0$. ☐

(ii) Hvis $f'(x_0) = 0$, så må funksjonen f ha eit lokalt ekstremum i $x = x_0$. ☐

(iii) Hvis $f'(x) = 0$ for alle $x \in]a, b[$, så er f konstant på $]a, b[$. ☐

(iv) Dersom f er ein odde funksjon som er deriverbar for alle $x \in \mathbb{R}$, så er f' ein like funksjon. ☐

(v) Differensiallikninga $y' = \dfrac{x^2}{y^2}$ har den allmenne løysninga $y^3 - x^3 = K$. ☐

(vi) For kvar $x \in \mathbb{R}$ har vi $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$. ☐

(vii) For $-1 < x < 1$ har vi $\dfrac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$. ☐

MA1101, 9/6-05

Eksamen, lösninger:

OPPGAVE 1:

(a)
$$\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)^{2/3}}{x-1} = -\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)^{2/3}}{1-x}$$

$$= -\lim_{x\to 1}(1-x)^{-\frac{1}{3}} = \begin{cases} -\infty & ; \text{ når } x\to 1- \\ \infty & ; \text{ når } x\to 1+ \end{cases}$$

Altså grensen eksisterer ikke.

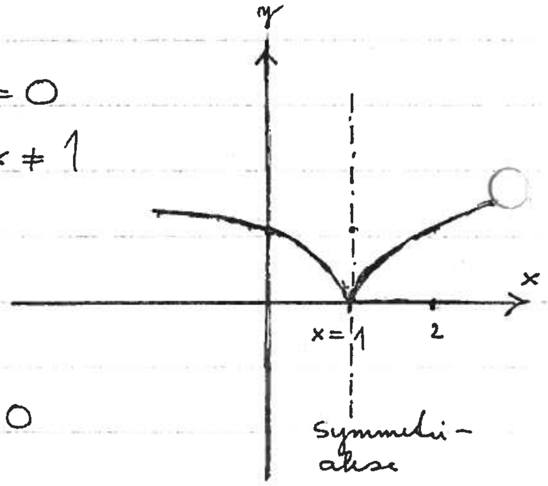
(b) For å avgjöre deriverbarheten i $x=1$ må vi se på:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)^{2/3}}{x-1}$$ som

ikke eksisterer i fölge (a). For $x \neq 1$ har vi:

$$f'(x) = -\frac{2}{3}(1-x)^{-1/3}$$

(c)



Vi observerer at $f(1)=0$ mens $f(x)>0$ for alle $x\neq 1$. Fra dette följer at f har et globalt (absolutt) minimum for $x=1$.

Fra (b) har vi at $f'(x)>0$ når $x>1$ og $f'(x)<0$ når $x<1$. Altså avtar funksjon i $]-\infty,1[$ og vokser i $]1,\infty[$. For $x\neq 1$ er $f'(x)\neq 0$, s.a. $x=1$ er eneste lokale ekstremum. Videre har vi symmetri om $x=1$ og

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$$

OPPGAVE 2:

Vi innfører betegnelsene:

$$OA = y(t) \quad , \quad OB = x(t).$$

Ut fra Pytagoras' teorem har vi derfor for hver t:

$$x(t)^2 + y(t)^2 \equiv 10^2 = 100.$$

Implisitt derivasjon gir:

$$2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) \equiv 0$$

eller: $$y'(t) = -\frac{x(t)}{y(t)} \cdot x'(t) \quad \text{når } y(t) \neq 0.$$

Når $y(t_0) = 6$ for $t = t_0$, har vi i samme tidspunkt $x(t_0) = \sqrt{100 - y(t_0)^2}$ $= \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$. Siden $x'(t) = 1/3$ m/s for alle t, har vi da:

$$y'(t_0) = -\frac{x(t_0)}{y(t_0)} \cdot x'(t_0) = -\frac{8}{6} \cdot \frac{1}{3} = \underline{-\frac{4}{9}}$$

Det øverste punktet på stolpen beveger seg altså <u>nedover</u> med en hastighet på $\underline{\frac{4}{9} \text{ m/s}}$.

OPPGAVE 3:

(a) Vi benytter delvis integrasjon:

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x \, dx$$

$$= x^2 \sin x - 2\left[-x\cos x + \int \cos x \, dx\right]$$

$$= \underline{x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + K}$$

(b) $\displaystyle\int_1^3 \sqrt{x}\, e^{-\sqrt{x}}\, dx$

Vi løser først det ubestemte integralet ved substitusjonen $u = \sqrt{x}$. Dette gir: $du = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$, og vi får videre:

$$\int \sqrt{x}\, e^{-\sqrt{x}}\, dx = 2\int x e^{-\sqrt{x}} \frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\int u^2 e^{-u}\, du$$

$$= 2\left[-u^2 e^{-u} + \int 2u e^{-u}\, du\right] = -2u^2 e^{-u} + 4\int u e^{-u}\, du$$

$$= -2u^2 e^{-u} + 4\left[-u e^{-u} + \int e^{-u}\, du\right]$$

$$= -2u^2 e^{-u} - 4u e^{-u} - 4e^{-u} + C$$

$$= -2x e^{-\sqrt{x}} - 4\sqrt{x}\, e^{-\sqrt{x}} - 4e^{-\sqrt{x}} + C$$

$$= -e^{-\sqrt{x}}\left[2x + 4\sqrt{x} + 4\right] + C$$

Dette gir videre:

$$\int_1^3 \sqrt{x}\, e^{-\sqrt{x}}\, dx = -e^{-\sqrt{3}}(6 + 4\sqrt{3} + 4)$$

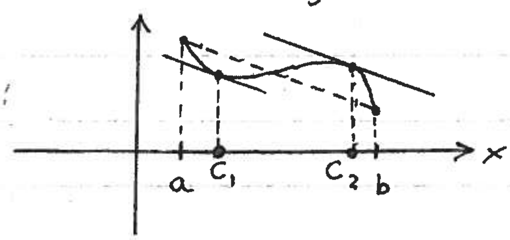
$$+ e^{-1}(2 + 4 + 4) = \underline{\frac{10}{e} - \frac{10 + 4\sqrt{3}}{e^{\sqrt{3}}}}$$

OPPGAVE 4:

(a) SEKANT-SETNINGEN:

Hvis funksjonen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig og dessuten deriverbar i $]a, b[$, så finnes det et punkt c s.a.

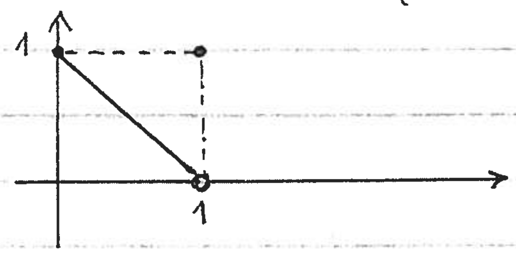
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Vi har at $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ er stigningstallet til sekanten som forbinder punktene $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$. Sekantsetningen sier at under ovenstående forutsetninger så finnes det minst et punkt $c \in]a,b[$ der kurvetangenten er parallell med denne sekanten. (På vår figur har vi angitt to slike punkter, $x = c_1$ og $x = c_2$.)

(b) • Hvis vi svekker betingelsene til f er deriverbar i $]a,b[$ og utelater kravet om at f skal være kontinuerlig i $[a,b]$, har vi følgende eksempel som viser at konklusjonen ikke holder:

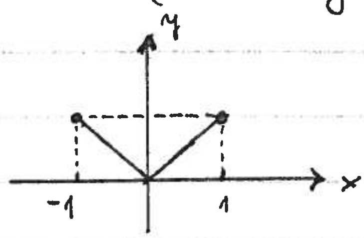
$$f(x) = \begin{cases} 1-x \, ; & 0 \le x < 1 \\ 1 \, ; & x = 1 \end{cases}$$



$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 0 \, , \quad f'(x) = -1 \text{ for alle } x \in]-1,1[$$

• Hvis vi utelater betingelsen: $f'(x)$ eksisterer i $]a,b[$, viser følgende eksempel at konklusjonen ikke holder:

$f(x) = |x|$
for $x \in [-1,1]$



Her vil $f'(0)$ ikke eksistere.

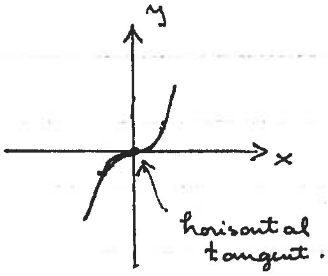
$$\frac{f(1) - f(-1)}{1 + 1} = 0 \, , \text{ mens } f'(x) = -1$$

for $x < 0$ og $f'(x) = 1$ for $x > 0$.

OPPGAVE 5:

(i) R (Teorem 1, s. 112, Adams)

(ii) G (Vi har følgende moteksempel:



$y = x^3$, $y' = 3x^2$

$y'(0) = 0$, men $x = 0$ gir hverken lokalt maksimum eller lokalt minimum.)

(iii) R (Anta at $a < x_1 < x_2 < b$; på intervallet $[x_1, x_2]$ oppfyller f betingelsen i sekant-setningen. Det finnes altså et $c \in]x_1, x_2[$ slik at:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Men siden $f'(c) = 0$, må $f(x_2) = f(x_1)$.)

(iv) R ($f(-x) = -f(x)$ gir:

$$f'(-x_0) = \lim_{-x \to -x_0} \frac{f(-x) - f(-x_0)}{-x + x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{-f(-x) + f(-x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).)$$

(v) R (Implisitt derivasjon gir: $3y^2y' - 3x^2 = 0$ eller ekvivalent: $y' = x^2/y^2$ når $y \neq 0$.)

(vi) R (Teorem 6, s. 201)

(vii) G ($\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, s. 207)