MA1101/6101

EKSAMEN 6/6 - 2007

LØSNINGER:

OPPG. 1

(a) Delvis integrasjon gir:

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx = x \ln x - \int \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \, dx$$

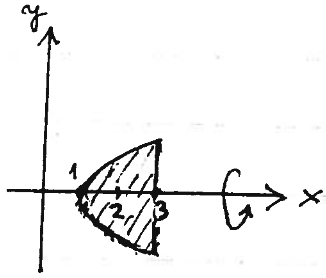
$$= \underline{x \ln x - x + C}$$

(b) Formelen for volumet av omreiningslegemet som framkommer når flatestykket begrenset av grafen til funksjonen:

$$y = \ln x \quad ; \quad 1 \leq x \leq 3$$

x-aksen og linjen $x = 3$ roteres om x-aksen er:

$$V = \pi \int_1^3 (\ln x)^2 dx$$



$$= \pi \left[x (\ln x)^2 - \int \cancel{x} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{\cancel{x}} dx \right]_1^3$$

fra (a)

$$= \pi \left[x (\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) \right]_1^3$$

$$= \pi \left[x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x \right]_1^3 = \underline{\pi \left[3(\ln 3)^2 - 6 \ln 3 + 4 \right]}$$

MERKNAD:

Noen tror at $(\ln x)^2 = 2 \ln x$, antagelig fordi man glemmer paranteser! Man

NB! har: $(\ln x)^2 \neq \ln(x^2) = 2 \ln x$.

OPPG. 2

(i) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^3} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \overset{\text{L'Hôpitals regel}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x^2} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \overset{\text{L'Hôpital}}{=}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6x} = \pm\infty$$ siden teller har grense 1 og nevner går mot 0.

<u>Grensen eksisterer m.a.o. ikke.</u>

(ii) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3}\right) = \text{"}\infty - \infty\text{"} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x^3} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \overset{\text{L'Hôpital}}{=}$$

Forkorte i teller og nevner!

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\cos x} - x\sin x - \cancel{\cos x}}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{3x}$$

$$= -\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{3}\cdot 1 = \underline{-\frac{1}{3}}$$

(Grensen $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ er kjent fra boken.)

(iii) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x} - 1}{x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \overset{\text{L'Hôpital}}{=}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}\cdot\cos 2x\cdot 2}{1} = \underline{2}$$

<u>MERKNAD:</u> Den vanligste feilen her at man benytter L'Hôpital på uttrykk som ikke er "$\frac{0}{0}$"; eksempelvis skriver:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6}$$

som selvsagt gir galt resultat.

<u>OPPG. 3</u>

(a) Vi skal bestemme A, B, C slik at:

$$\frac{3x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

Multiplikasjon på begge sider med nevneren $(x-1)(x+1)^3$ gir:

$$3x = A(x+1)^2 + B(x-1) + C(x^2-1)$$
$$= Ax^2 + 2Ax + A + Bx - B + Cx^2 - C.$$

Siden dette skal holde for alle x må vi ha:

$A + C = 0$ (venstresiden har ikke 2. gradsledd)
$2A + B = 3$
$A - B - C = 0$ (venstresiden har ikke konstantledd)

Addisjon av 1. og 3. ligning gir:

$$\left.\begin{array}{l} 2A - B = 0 \\ 2A + B = 3 \end{array}\right\} \text{ addisjon gir:}$$

$4A = 3$, $A = \frac{3}{4}$, $C = -A = -\frac{3}{4}$,
$B = A - C = \frac{3}{4} - (-\frac{3}{4}) = \frac{3}{2}$

$$\underline{A = \frac{3}{4}, \quad B = \frac{3}{2}, \quad C = -\frac{3}{4}}$$

<u>MERKNAD:</u>

Gaussisk eliminasjon (MA 1201) gir en mer oversiktlig prosess til bestemmelse av A, B, C.

(b)
$$\int_2^3 \frac{3x}{(x-1)(x+1)^2}\,dx \overset{\text{Fra (a)}}{=} \frac{3}{4}\int_2^3 \frac{dx}{x-1} + \frac{3}{2}\int_2^3 \frac{dx}{(x+1)^2}$$
$$-\frac{3}{4}\int_2^3 \frac{dx}{x+1} = \left[\frac{3}{4}\ln(x-1) - \frac{3}{2}(x+1)^{-1} - \frac{3}{4}\ln(x+1)\right]_2^3$$
$$= \frac{3}{4}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\Bigg|_2^3 - \frac{3}{2}(x+1)^{-1}\Bigg|_2^3 = \frac{3}{4}\left(\ln\frac{2}{4} - \ln\frac{1}{3}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{3}{4}\ln\frac{3}{2} + \frac{1}{8}$$

MERKNAD:

Det å benytte lommeregner for å angi en tilnærmet "numerisk" verdi av ovenstående eksakte svar er bare å kaste bort tiden!!

OPPG. 4

Vi ser straks at

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{T^2}{2+x}$$

er en separabel differensialligning. Vi har:

$$\int \frac{dT}{T^2} = -\int \frac{dx}{2+x}$$

som gir:

$$-\frac{1}{T} = -\ln(2+x) + K$$

eller:

(*) $$T = \frac{1}{\ln(2+x) - K}$$

Initialbetingelsen gir:

$$32 = T(0) = \frac{1}{\ln 2 - K}$$

eller: $\ln 2 - K = \frac{1}{32}$; $K = \ln 2 - \frac{1}{32}$

Innsatt i (*) gir dette:

$$T(x) = \frac{1}{\ln(2+x) - \ln 2 + \frac{1}{32}}$$

$$= \frac{32}{32\ln\left(1+\frac{x}{2}\right) + 1}$$

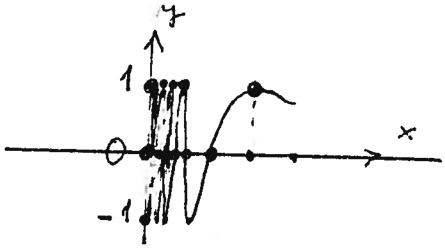
MERKNAD: Noen tror at $\frac{1}{\ln \alpha} = -\ln \alpha$,

antagelig fordi $\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\ln\alpha$ når $\alpha > 0$.
Det første ville jo medføre at:
$$(\ln\alpha)^2 = -1 \quad \text{for hver } \alpha > 0!!$$

OPPG. 5

(a) Vi antar at $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ og at $|g(x)| \le M$ når $0 < |x - x_0| < \delta$.
For hver $\varepsilon > 0$ finnes det da et $\delta_1 > 0$ s.a. når $0 < |x - x_0| < \delta_1$ så vil:
$$|f(x)| < \varepsilon / M.$$
(Dette er den presise definisjonen av at $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.)
For $\delta_2 = \min(\delta, \delta_1)$, har vi dessuten at $|g(x)| \le M$ når $0 < |x - x_0| < \delta_2$.
Altså har vi for $0 < |x - x_0| < \delta_2$ at $|f(x) \cdot g(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$
Altså har vi at:
$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$$

(b) Vi har for $x_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}$ at
$\cos\frac{1}{x_n} = \cos\frac{(2n+1)\pi}{2} = 0$, og for $t_n = \frac{1}{2n\pi}$
at $\cos\frac{1}{t_n} = \cos 2n\pi = 1$. Siden både $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$ og $\lim_{n \to \infty} t_n = 0$ betyr dette at
$$\underline{\lim_{x \to 0} \cos\frac{1}{x}}$$



<u>ikke eksisterer.</u>

Vi har $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$ alle $x \neq 0$, mens $\lim_{x\to 0} x = 0$. Ut fra (a) har vi dermed:

$$\lim_{x\to 0}\left(x \cdot \sin\frac{1}{x}\right) = 0.$$

(c) For $\underline{x \neq 0}$ kan vi benytte velkjente derivasjonsregler:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right) = 2x \sin\frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos\frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{x^2}$$

$$= 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

Fra (b) vet vi at $\lim_{x\to 0} 2x\sin\frac{1}{x} = 0$ mens $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ ikke eksisterer.
Altså vil $\lim_{x\to 0} f'(x)$ ikke eksistere.
Dette er nok til å slutte at

$$\underline{\lim_{x\to 0} f'(x) \neq f'(0)}$$

MERKNAD: Egentlig trenger en altså ikke å prøve å bestemme $f'(0)$. Men om man ønsker å finne $f'(0)$ (hvis funksjonen er deriverbar i $x=0$) har man:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x} - 0}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0 \quad \text{(ut fra (a).)}$$

<u>Altså har vi $f'(0) = 0$, mens</u>
<u>$\lim_{x\to 0} f'(x)$ ikke eksisterer.</u>

NB! Noen sier at $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x} = \cos\frac{1}{0}$ og siden $\frac{1}{0}$ ikke er definert, eksisterer ikke grensen. Men i neste linje settes at $0\cdot\sin\frac{1}{0} = 0$. Hva er logikken i dette??