Løsningsforslag MA1101/MA6101 Juni 2010

Vanlige forbehold! Kari H.

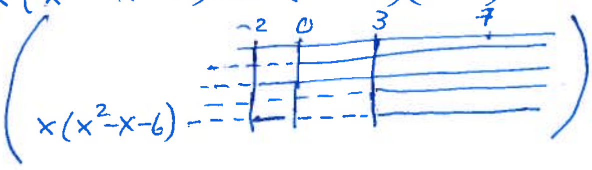
Oppgave 1

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^3-x^2-6x}}{x-7}$$

a) Definisjonsmengden: Den største mengden der formelen gir mening (siden noe annet ikke er sagt). Altså:

$x \neq 7$ og $x^3-x^2-6x \geq 0 \Leftrightarrow x(x^2-x-6) = x(x+2)(x-3) \geq 0$

og



$$\underline{D_f = [-2,0] \cup [3,7[\cup]7,\infty)}$$

Nullpunktene til f: $\underline{\{-2\} \cup \{0\} \cup \{3\}}$

$\underline{f > 0 \text{ på }]7,\infty), \quad f < 0 \text{ på }]-2,0[\cup]3,7[}$

b) $x^3 - 21x^2 + 20x + 42 : x+1 = \underline{x^2 - 22x + 42}$

$$\begin{array}{l} x^3 - x^2 \\ \hline \quad 22x^2 + 20x + 42 \\ \quad 22x^2 - 22x \\ \hline \qquad 42x + 42 \end{array}$$

c) $$f'(x) = \left[\frac{3x^2-2x-6}{2\sqrt{x^3-x^2-6x}}(x-7) - \sqrt{x^3-x^2-6x}\right] \Big/ (x-7)^2$$

$$= \frac{x^3-21x^2+20x+42}{2(x-7)^2\sqrt{x^3-x^2-6x}}$$

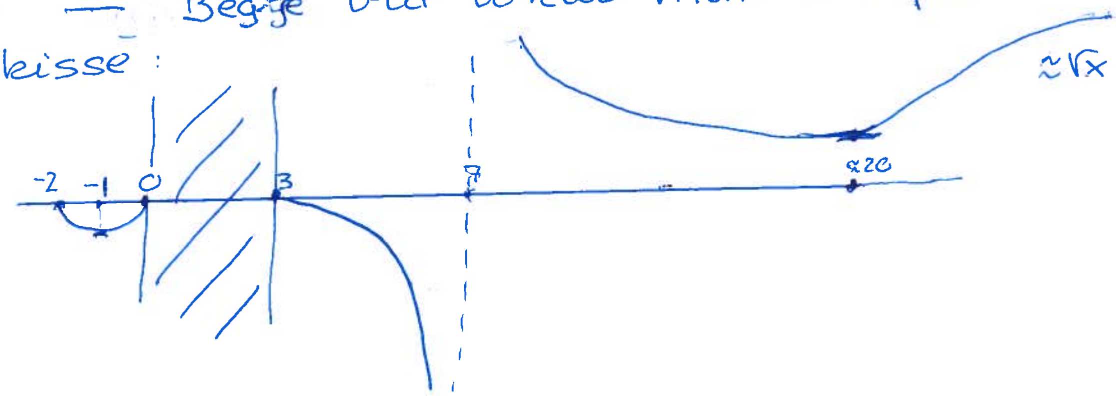
$$x^3-21x^2+20x+42 \overset{b)}{=} (x+1)(x^2-22x+42)$$
$$= (x+1)(x-11-\sqrt{79})(x-11+\sqrt{79})$$

$(11+\sqrt{79} \approx 20, \quad 11-\sqrt{79} \approx 2)$

Lokale ekstremalpunkter for $x=-1$ og $x = 11+\sqrt{79}$.

$\therefore$ Begge blir lokale minimumspunkter.

Skisse:



Oppgave 2

a) $$\lim_{x\to 0^+} x\ln(\sin x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \sin x}{x^{-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \underset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-x^{-2}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -\left(\frac{x}{\sin x}\right) x \cos x$$

$$= -1\cdot 0 \cdot 1 = \underline{\underline{0}}$$

b)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x\sqrt{x}} \int_0^x (1-e^{2\sqrt{t}})\,dt = \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x (1-e^{2\sqrt{t}})\,dt}{x^{3/2}} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\underset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1-e^{2\sqrt{x}}}{\frac{3}{2} x^{1/2}} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\underset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{2}{2\sqrt{x}}\cdot e^{2\sqrt{x}}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}} = \underline{\underline{-\frac{4}{3}}}$$

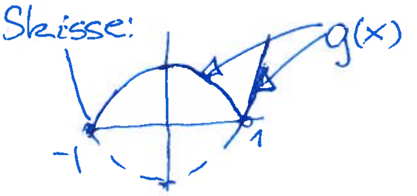
Oppgave 3

$$g'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|(1+h)^2-1| - |1^2-1|}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{|h^2+2h|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h||h+2|}{h}$$

$$= \begin{cases} 2 & \text{når } h\to 0^+ \\ -2 & \text{"}\quad h\to 0^- \end{cases}$$

Skisse:



$\therefore$ $\underline{g \text{ er ikke deriverbar i } 1}$.

Oppgave 4

a) $$\frac{3x^2+2x}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

$$A = \left.\frac{3x^2+2x}{x^2+2x+2}\right|_{x=1} = \underline{1} \quad \text{slik at} \quad \frac{Bx+C}{x^2+2x+2} = \underline{\frac{2(x+1)}{x^2+2x+2}}, \text{ og}$$

$$\underline{\underline{I = \ln|x-1| + \ln(x^2+2x+2) + K}}$$

b) Vi har en linear diff. lign slik at

$$\frac{d}{dx}\Big[\underbrace{e^{\ln(3x^2+2x)}}_{3x^2+2x}\cdot y\Big] = \frac{3x^2+2x}{(x-1)(x^2+2x+2)}$$

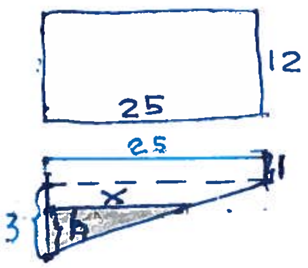
og $$(3x^2+2x)\,y = I \text{ i a) eller } \underline{\underline{y = \frac{\ln|x-1| + \ln(x^2+2x+2) + K}{3x^2+2x}}}$$

c) Her er vi gitt en separabel diff. lign med startverdi:
$e^x y' = \cos x$, $y(0) = 2$ eller $\int dy = \int e^{-x} \cos x \, dx$ med $y(0)=2$
$J = \int e^{-x} \cos x \, dx = -e^{-x}\cos x + e^{-x} \sin x - J$; $J = \frac{1}{2} e^{-x}(\sin x - \cos x) + C$
$\underline{y = \frac{1}{2} e^{-x}(\sin x - \cos x) + C}$ der $2 = \frac{1}{2}(-1) + C$ eller $\underline{C = 5/2}$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{2}\left[e^{-x}(\sin x - \cos x) + 5\right]}}$$

Oppgave 5

Svømmebassenget ovenfra



Fra siden
$(h < 3)$

$\frac{h}{x} = \frac{3}{25}$
$\underline{x = \frac{25}{3} h}$

Volumet av vannet:

$$V = \underbrace{\frac{1}{2} h \cdot x}_{\text{Grunnflate}} \cdot 12 = 6hx = 6h \cdot \frac{25h}{3} = \underline{50h^2}$$

$\frac{dV}{dt} = 100h \frac{dh}{dt}$ der $\underline{\frac{dV}{dt}} = 2000 \, dm^3/min = \underline{2 \, m^3/min}$

Altså $\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=2} = \frac{2}{100 \cdot 2} = \frac{1}{100} \left[m/min\right]$ ⊃: $\underline{1 cm/min}$

Oppgave 6

(Her lukter det sekantsetning! Også gitt h 2010.)
La oss først bemerke at da f' og dermed $|f'|$ er en kontinuerlig funksjon på $[a,b]$ fins M slik at $\underline{|f'(x)| \leq M}$ for alle $x \in [a,b]$.
Ulikheten minner om Sekantsetningen, så la $\underline{x \neq y}$ $(x, y \in [a,b])$: Ved Sekantsetningen gjelder $\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| = |f'(c)|$ der c mellom x og y.

Vi har da $\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leq M \iff |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$
Den siste ulikheten gjelder trivielt når $x = y$.
Som konstanten K kan vi altså velge M!