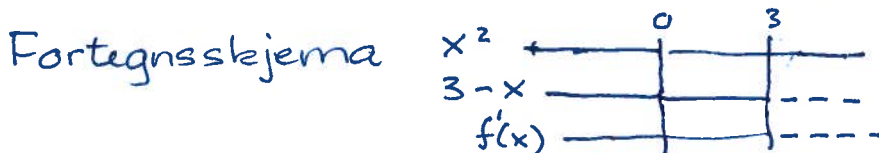


LØSNINGSFORSLAG MA1101 mai 2011

Vanlige forhold!
Kari H.

Oppgave 1 $f(x) = x^3 e^{-x} + 2$ er gitt; deriverbar på \mathbb{R} .

a) $f'(x) = (3x^2 - x^3)e^{-x} = x^2(3-x)e^{-x}$



f er voksende på $(-\infty, 3]$ og avtagende på $[3, \infty)$.

Altså må f ha et maksimum for $x=3$.

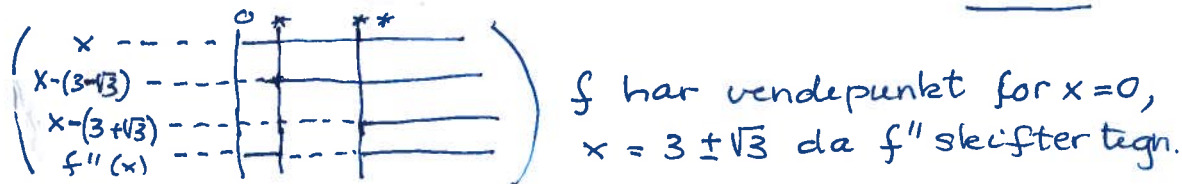
Maksimumspunkt: $(3, 27e^{-3} + 2)$

$\approx (3, 1.4 + 2) = (3, 3.4)$

b) $f'(x) = e^{-x}(3x^2 - x^3)$

$f''(x) = -e^{-x}(3x^2 - x^3) + e^{-x}(6x - 3x^2) = e^{-x}(x^2 - 6x + 6)x$

$f''(x) = 0$ når $x = 0$ eller $x = \frac{6 \pm \sqrt{36-24}}{2} = \underline{3 \pm \sqrt{3}}$



Vendepunkter altså: $(0, 2), (3 \pm \sqrt{3}, f(3 \pm \sqrt{3}))$.

Siden f er glatt på hele \mathbb{R} , har ikke f noen vertikale asymptoter. - Da

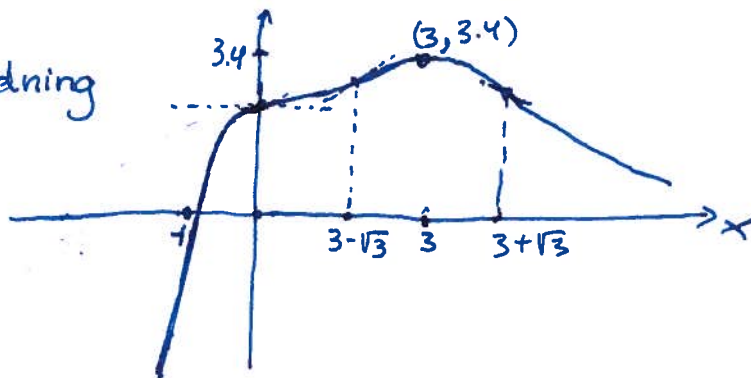
$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 e^{-x} + 2) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 e^{-x} + 2) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{e^x} + 2 \right) = 0 + 2 = \underline{2}$

har f en horisontal asymptote $y=2$

c)

Da f er voksende på $(-\infty, 3]$ kan f høyst ha ett nullpunkt her. Da $f(-1) = -e + 2 < 0$ og $f(0) = 2$, har f minst ett nullpunkt her (Skjæringssetningen). Da f avtar mot 2 på $[3, \infty)$ har f ikke noe nullpunkt på $[3, \infty)$. Konklusjon: f har ett nullpunkt.

Skisseavtydning



Oppgave 2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Grensen eksisterer ikke.

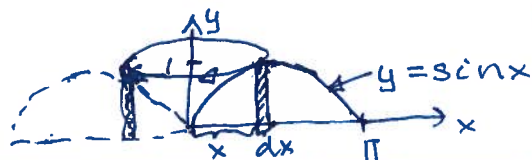
Den neste formen er av type 1^∞ (Se Ex 7 s. 231). Vi lar derfor $y = \left(\frac{x}{x-1}\right)^{2x+1}$ og tar Logaritmen på begge sider:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \ln y &= \lim_{x \rightarrow \infty} (2x+1) \ln \frac{x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\frac{x}{x-1}\right)}{\left(\frac{1}{2x+1}\right)^{-1}} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x-1}{x} \cdot \frac{-1}{(x-1)^2}}{-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{(2x+1)^2}{x(x-1)} = 2 \end{aligned}$$

Altså $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \underline{\underline{e^2}}$

Merke Alternativt har vi $\left(\frac{x}{x-1}\right)^{2x+1} = \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{(x-1)\frac{2x+1}{x-1}} \rightarrow e^2$ når $x \rightarrow \infty$.

Oppgave 3



$$\begin{aligned} V &= \int_0^\pi 2\pi x \sin x \, dx \quad (\text{Sylinderskall}) \\ &= 2\pi \left[-x \cos x + \sin x \right]_0^\pi = \underline{\underline{2\pi^2}} \end{aligned}$$

Oppgave 4

$$x^3 + x^2 - 5x - 15 : x^2 - 9 = x + 1 + \frac{4x - 6}{x^2 - 9}$$

$$\frac{4x - 6}{(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} \quad \text{der } A = 1, B = 3$$

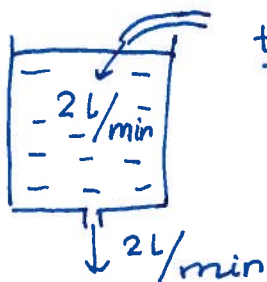
slik at integralet blir $\underline{\underline{\frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x-3| + \ln|x+3| + C}}$

Oppgave 5

$$e^{-x} \frac{dy}{dx} = 1 + y^2 \quad \text{slik at} \quad \int \frac{dy}{1+y^2} = \int e^x dx \quad \text{dvs. } \text{Arctan } y = e^x + C$$

$y = \tan(e^x + C)$

Oppgave 6



$t=3$: 1.5 kg salt i tanken,

$t > 3$: I tanken da:

$$\text{Økning salt/min} = \text{salt inn/min} - \text{salt ut/min}$$

$$\frac{dy}{dt} = 0.5 - \frac{y(t) \cdot 2}{206}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = 0.5 - \frac{y(t)}{103}$$

$$\text{eller } \frac{dy}{dt} + \frac{y}{103} = 0.5 \text{ LINEÆR}$$

Altså vil

$$\frac{d}{dt} (e^{t/103} \cdot y) = 0.5 e^{t/103} \Rightarrow \underline{y = 51.5 + C e^{-t/103}}$$

Med startverdien $y(3) = 1.5$ får vi da

$$-50 = C e^{-3/103} \text{ eller } \underline{C = -50 e^{3/103}}$$

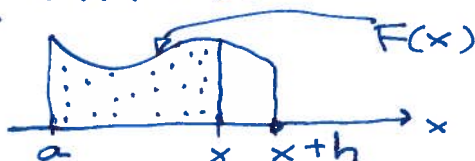
Salt i tanken når $t = 25$ (min): $51.5 - 50 e^{-22/103} \approx \underline{\underline{11.1}}$ (kg)

Når $t \rightarrow \infty$ vil $y(t) \rightarrow \underline{51.5}$ (kg). STEMME! $0.25 \cdot 203$

Oppgave 7

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \text{ der } F(x) = \int_a^x f(t) dt, f \text{ kont.}$$

La $h > 0$ ($h < 0$ behandles tilsvarende)



$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h}$$

$$\stackrel{\text{MVS}}{=} \frac{f(c) h}{h} = f(c) \text{ der } c \in]x, x+h[$$

Integral

Altså er $\boxed{F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f(x)}$ da f er kontinuert.