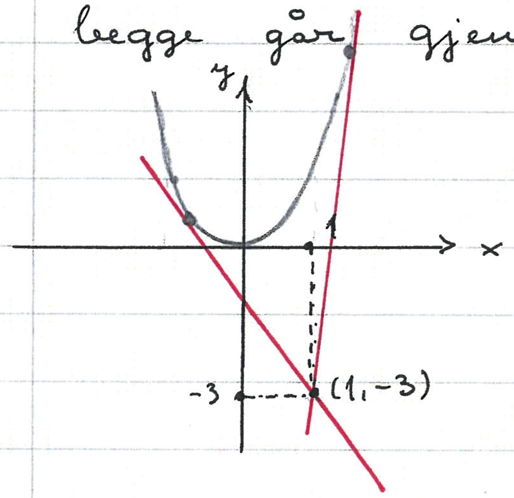
MA 1101, ØVING 5, H 2011.
Uke 39 (26/9 – 30/9)

2.2
47, s. 107

Vi skal bestemme ligningen for to tangenter til parabelen $y = x^2$ som begge går gjennom punktet $(1, -3)$



Vi betegner berøringspunkt (a, a^2) der a må bestemmes.
Vi har $y' = 2x$ s.a. stigningstallet må være $k = 2a$.
Ligning for en tangent i (a, a^2) parabelen blir:

$$y - a^2 = 2a(x - a)$$

Skal en slik tangent gå gjennom $(1, -3)$ får vi:

$$-3 - a^2 = 2a(1 - a) \quad \text{eller}$$

$$-3 - a^2 = 2a - 2a^2 \quad \text{eller}$$

$$a^2 - 2a - 3 = 0 \quad ; \quad \text{d.v.s.} \quad a = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

Ligningene blir derfor:

$$y - 9 = 6(x - 3) \quad ; \quad y = 6x - 9$$

$$y - 1 = -2(x + 1) \quad ; \quad y = -2x - 1$$

Regningen ovenfor viser at det blir akkurat to tangenter som går gjennom $(1, -3)$. (En bør vel kontrollere at $(1, -3)$ ligger på begge disse linjene?)

#53, s107

Vi skal benytte formelen

$$a^3 - b^3 \equiv (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

for å bestemme $f'(x)$ når $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

I det etterfølgende bruker vi formelen for $a = x^{1/3}$ og $b = x_0^{1/3}$. Vi ser på:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^{1/3} - x_0^{1/3}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x^{2/3} + x^{1/3}x_0^{1/3} + x_0^{2/3}}$$

$$= \frac{1}{3\, x_0^{2/3}} \quad \text{når} \quad x_0 \neq 0.$$

Altså $f(x) = x^{1/3} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3}$

Dette er i overensstemmelse med den generelle derivasjonsregelen:

$$f(x) = x^r \Rightarrow f'(x) = r x^{r-1}$$

2.3

#2, s. 114

Vi skal bestemme den deriverte av funksjonen:

$$f(x) = 4x^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{x}$$

$$f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} - 5 \cdot \frac{-1}{x^2} = \underline{2/\sqrt{x} + \frac{5}{x^2}}$$

der vi har benyttet Eks. 2 (c), s. 101 og Reciprocal Rule på s. 112. (Begge regler er bevist på forelesning 20/9)

#11, s 114

$$f(x) = \sqrt{x}\left(5 - x - \frac{x^2}{3}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(5 - x - \frac{x^2}{3}\right) + \sqrt{x}\left(-1 - \frac{2}{3}x\right)$$

$$= \frac{5}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}x^{3/2} - x^{1/2} - \frac{2}{3}x^{3/2}$$

$$= \underline{\frac{5}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{6}x^{3/2}}$$

#26, s.114

$$F(t) = \frac{t^2 + 7t - 8}{t^2 - t + 1}$$

$$F'(t) = \frac{(2t+7)(t^2-t+1) - (t^2+7t-8)(2t-1)}{(t^2-t+1)^2}$$

$$= \frac{(2t^3 - 2t^2 + 2t + 7t^2 - 7t + 7) - (2t^3 + 14t^2 - 16t - t^2 - 7t + 8)}{(t^2-t+1)^2}$$

$$= \frac{(5t^2 - 5t + 7) - (13t^2 - 23t + 8)}{(t^2+t+1)^2} = \underline{\frac{-8t^2 + 18t - 1}{(t^2+t+1)^2}}$$

#35, s.114

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{f(x)}\right)\Bigg|_{x=2} = \frac{2x \cdot f(x) - x^2 f'(x)}{f(x)^2}\Bigg|_{x=2}$$

$$= \frac{2 \cdot 2 f(2) - 2^2 f'(2)}{f(2)^2} = \frac{4 \cdot 2 - 4 \cdot 3}{2^2} = \underline{-1}$$

(Ikke facit-svar!)

siden $f(2) = 2$ og $f'(2) = 3$

#45, s.114

Vi skal bestemme de punkter på kurven

$$y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

der kurvetangenten er horisontal, m.a.o. der $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = \underset{\text{KJERNEREGELEN!}}{-1(x^2+x+1)^{-2} \cdot (2x+1)} = \underline{-\frac{(2x+1)}{x^2+x+1}}$$

Må ha $x = -\frac{1}{2}$ for at $f'(x)$ skal være 0.

$x = -\frac{1}{2}$ gir $y = \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1} = \frac{4}{3}$. Altså det eneste punkt der kurven har horisontal tangent er $\underline{\left(-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right)}$

2.4

#1, s. 119

$$f(x) = (2x+3)^6 \qquad f'(x) = 6(2x+3)^5 \cdot 2$$
$$= \underline{12(2x+3)^5}$$

#14, s. 119

$$f(x) = \left(1 + \sqrt{\frac{x-2}{3}}\right)^4$$
$$f'(x) = 4\left(1+\sqrt{\frac{x-2}{3}}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{x-2}{3}}}\right) \cdot \frac{1}{3}$$
$$= \underline{\frac{2}{3}\left(1+\sqrt{\frac{x-2}{3}}\right)^3 \sqrt{\frac{3}{x-2}}} \qquad \text{når} \quad x > 2$$

#31, s. 119

$$\frac{d}{dt}\left(\sqrt{3t-7}\right)\Big|_{t=3} = \frac{1}{2}\frac{3}{\sqrt{3t-7}}\Big|_{t=3} = \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{9-7}}$$
$$= \underline{\frac{3}{2\sqrt{2}}}$$

2.5

#12, s. 124

$$\frac{d}{dt}\left(\cos\sqrt{x}\right) = \left(-\sin\sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \underline{\frac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}$$

#37, s. 125

Anta at $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ er en kjent formel. Vi skal benytte denne formel til å bevise at

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Derivasjon på begge sider gir:

$$\frac{d}{dx}(\sin 2x) = 2\frac{d}{dx}(\sin x \cos x)$$
$$2\cos 2x = 2(\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x)$$

eller $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

#53, s. 125

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} \cdot \lim_{x \to 0}\frac{2}{\cos 2x} \overset{\text{TEOREM 8}}{=} 1 \cdot \frac{2}{1} = \underline{2}$$