MA 1101, ØVING 6, H 2011

Uke 40 (3/10 - 7/10)

2.6

#9, s 129

Vi skal bestemme y', y'' og y''' når
$$y = \tan x$$

$$y = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow y' = \frac{(\cos x)^2 - (\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$y'' = -2\cos^{-3} x\,(-\sin x) = 2\cos^{-2} x \cdot \tan x = 2\sin x \sec^3 x$$

$$y''' = 2(-2\cos^{-3} x)(-\sin x)\tan x + 2\cos^{-2} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= 4\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} + 2\frac{1}{\cos^4 x} = 4\sin^2 x \sec^4 x + 2\sec^4 x.$$

(Vi har ikke introdusert sec på forelesningene!)

#13, s. 129

Finn $f^{(n)}(x)$ når $f(x) = x^{-1}$. Vi har da:

$$f'(x) = -x^{-2} \quad (\text{Ant } x \neq 0)$$
$$f''(x) = 2x^{-3}$$
$$f'''(x) = -1 \cdot 2 \cdot 3\, x^{-4}$$

Antar ut fra dette at $f^{(n)}(x) = n!\, x^{-n-1}(-1)^n$ (*)

Anta at $P(k)$ holder: $f^{(k)}(x) = k!\, x^{-k-1}(-1)^k$

Vi har da: $f^{(k+1)}(x) = -(k+1)!\, x^{-k-2}$. Altså holder $P(k+1)$. Formelen (*) gjelder dermed for alle naturlige tall n.

#27, s. 129

$$f(x) = \tan x, \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}$$
$$= \tan^2 x + 1$$

Anta at $\frac{d^k(\tan x)}{dx^k} = a_0(\tan x)^k + a_1(\tan x)^{k-1}$

$+ \cdots + a_{n-1}\tan x + a_n$. Kjerneregelen gir:

$$\frac{d}{du}\left(a_0 u^k + a_1 u^{k-1} + \cdots + a_{n-1}u + a_n\right)\frac{du}{dx} =$$
$$\left(k a_0 u^{k-1} + (k-1)a_1 u^{k-2} + \cdots + a_{n-1}\right)(1 + \tan^2 x) =$$

$= [k\, a_0 (\tan x)^{k-1} + (k-1)\, a_1 (\tan x)^{k-2} + \cdots + a_{m-1}] (1 + \tan^2 x)$

Dette er et polynom av grad $k+1$ i $\tan x$. Altså gjelder $P(1)$ og $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Dermed holder $P(n)$ for alle naturlige tall n.

2.8

#3, s.142

Vi skal illustrere sekantsetningen ved å bestemme et (eller flere?) punkt i det åpne intervallet $(-2, 2)$ der grafen til

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

er parallell med sekanten som forbinder $(-2, -1)$ og $(2, 3)$.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{3 - (-1)}{2 - (-2)} = \frac{4}{4} = 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 1 \; ; \quad 3x^2 = 4 \; ; \quad \underline{x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}}$$

#5, s.142

(*) Vi skal bevise at $\tan x > x$ for $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

Vi har at $y = \tan t$ er kont. på $[0, x]$ og deriverbar i $(0, x)$. V.h.a. sekantsetningen kan vi slutte at det finnes et punkt $c \in (0, x)$ s.a.

$$\frac{\tan x - \tan 0}{x - 0} = \frac{1}{\cos^2 c}$$

Siden $|\cos c| < 1$ for alle $c \in (0, x)$, gir dette

$$\frac{\tan x}{x} = \frac{1}{\cos^2 c} > 1 \quad \therefore \quad \underline{\tan x > x}$$

(*) (Påstanden er bevist på annen måte på forelesning. Se fig. 2.21, s.120)

#13, s. 142

Vi skal avgjøre hvor funksjonen

$$f(x) = x^3(5-x)^2$$

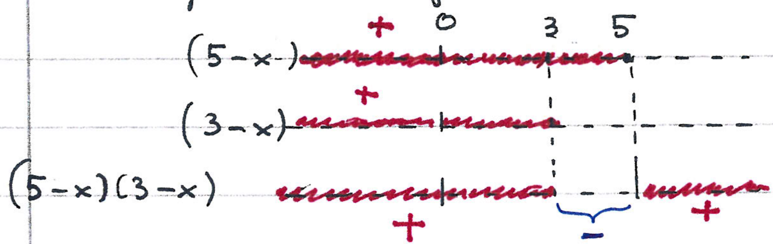
er voksende og hvor den er avtagende.

$$f'(x) = 3x^2(5-x)^2 - x^3 \cdot 2(5-x)$$

$$= x^2(5-x)(3(5-x) - 2x)$$

$$= 5x^2(5-x)(3-x)$$

Fortegnsdrøfting:



$f'(x) > 0$ når $x > 5$ og når $x < 3$ unntatt i $x = 0$ der $f'(x) = 0$.

Dette må nevnes !

Siden $f(x)$ er negativ for $x < 0$ og positiv for $x > 0$ fordi faktoren x^3 skifter fortegn og $(5-x)^2 > 0$ i et intervall omkring $x = 0$, er funksjonen voksende i $(-\infty, 3)$ og i $(5, \infty)$. Den er avtagende i $(3, 5)$

#18, s. 142

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & ; \; x \neq 0 \\ 0 & ; \; x = 0. \end{cases}$$

For $x \neq 0$ er f sammensatt av deriverbare funksjon i et intervall omkring x. Vi har da at $f'(x)$ eksisterer. Vi har videre:

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= 2x\sin\frac{1}{x} - \cdot\cos\frac{1}{x} \quad \text{når} \quad x \neq 0.$$

Videre har vi:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\left(h\sin\frac{1}{h}\right) \overset{(*)}{=} 0$$

((*) I følge oppg # 27, s.93 / evt. oppg. # 78, s.71. Gjennomgått på forelesningen 8/9.)

Derimot har vi at $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ ikke eksisterer (Dette bevises nøyaktig som man beviser at $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ ikke eksisterer. Gjennomgått på forelesningen 6/9.)

<u>#20, s142</u>

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2\sin\frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

(a) Vi skal ut fra definisjonen av derivert bevise at $f'(0) = 1$

Se forrige oppgave!

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\left(1 + 2x\sin\frac{1}{x}\right) = 1 + 2\cdot 0 = \underline{1}$$

(b) Vi skal bevise at hvert intervall som inneholder 0 inneholder x s.a. $f'(x) < 0$.

For $x \neq 0$ har vi:

$$f'(x) = 1 + 4x\sin\frac{1}{x} + 2x^2\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 1 + 4x\sin\frac{1}{x} - 2\cos\frac{1}{x}.$$

For $|x| < \frac{1}{4}$ er $\left|4x\sin\frac{1}{x}\right| < 1$

For en følge $x_1 = \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{4\pi}, \frac{1}{6\pi}, \ldots$ vil $-2\cos\frac{1}{x} = -2$. Altså i slike punkt vil $f'(x) < 1 + 1 - 2 < 0$.

Er dette tilstrekkelig til å kunne slutte at at funksjonen ikke kan være voksende på noe intervall som inneholder 0?

Vi anmerker følgende observasjon: Hvis $f'(x_0) < 0$ vil det finnes $x_1 > x_0$ i ethvert intervall omkring x_0 der $f(x_1) < f(x_0)$. Dette innsees slik:

NB! Her benyttes den formelle def. av limes med $\varepsilon = \frac{1}{2}|f'(x_0)|$

Siden $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) < 0$, finnes det $\delta > 0$ s.a. når $0 < |x - x_0| < \delta$, så vil

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \frac{1}{2} f'(x_0) < 0$$

Velges x_1 slik at $x_0 < x_1 < x_0 + \delta$, må vi da ha:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} < \frac{1}{2} f'(x_0)$$

Siden $x_1 - x_0 > 0$ må da $f(x_1) < f(x_0)$. D.v.s. at f ikke kan være voksende.

2.9

#12, s. 147

Vi får oppgitt at en kurve er gitt ved ligningen:

$$(*) \quad x + 2y + 1 = \frac{y^2}{x - 1}$$

Vi skal bestemme tangent-ligningen i kurve-punktet $(-2, 1)$.

(Teorien her er tynn når det gjelder å avgjøre om (*) virkelig definerer y som funksjon av x. Dette problem taes opp senere i boken. Vi må bare her anta (*) gir $y = f(x)$ der f er deriverbar!)

Vi deriverer m.h.p. x og får:

$$1 + 2y' = \frac{2yy'(x-1) - y^2}{(x-1)^2}$$

Vi er interessert i y' i kurvepunktet $(2,-1)$ og trenger bare å sette inn $x = 2$, $y = -1$ i ovenstående formel:

$$1 + 2y' = \frac{2(-1)y'(2-1) - 1}{(2-1)^2}$$

eller

$$1 + 2y' = -2y' - 1$$

som gir: $4y' = -2$ $\quad y' = -\frac{1}{2}$

Ligningen for tangenten blir dermed:

$$y + 1 = -\tfrac{1}{2}(x-2)$$

$$\underline{y = -\tfrac{1}{2}x}$$

<u>#21, s. 147:</u>

Vi skal her uttrykke y'' v.h.a. x og y når $x^2+y^2=a^2$ definerer y implisitt funksjon av x. Vi har:

$$2x + 2yy' = 0$$

Dette gir: $y' = -\frac{x}{y}$. Dette gir videre:

$$y'' = -\frac{1\cdot y - xy'}{y^2} = -\frac{y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{\frac{x^2}{y} + y}{y^2}$$

$$= -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = \underline{-\frac{a^2}{y^3}}$$

<u>#29, s. 147:</u>

Vi får oppgitt at $z = \tan\frac{x}{2}$ og skal finne $\frac{dx}{dz}$. Vi har da $x = x(z)$. Dette gir ved derivasjon m.h.p. z:

$$1 = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot x'(z) \quad \text{eller} \quad \frac{dx}{dz} = 2\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{2}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} = \underline{\frac{2}{1+z^2}}$$

Videre har vi:

$$\frac{2z}{1+z^2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\sin x}{1}$$

$$= \underline{\sin x}$$

Vi har også:

$$\frac{1-z^2}{1+z^2} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\cos x}{1} = \underline{\cos x}$$

2.10

3, s.153

Vi skal finne den antideriverte:

$$\int \sqrt{x}\, dx$$

Siden $\frac{d}{dx}(x^{3/2}) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$, får vi:

$$\int \sqrt{x}\, dx = \underline{\frac{2}{3}x^{3/2} + C}$$

#7, s. 153

$$\int \tan x \cos x\, dx = \int \sin x\, dx = \underline{-\cos x + C}$$

siden $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

#21, s. 153

$$\int 2x\sin(x^2)\, dx = \underline{-\cos(x^2) + C}$$

siden $\frac{d}{dx}(\cos(x^2)) = -\sin x^2 \cdot 2x$

#43, s.153

Vi skal vise at

$$y = Ax + B/x$$

er en løsning av diff. ligningen $x^2y'' + xy' - y = 0$ for $x \neq 0$. $y' = A - B/x^2$, $y'' = 2B/x^3$.

Innsetting gir:

$$x^2y'' + xy' - y = \frac{2B}{x} + x\left(A - \frac{B}{x^2}\right) - \left(Ax + \frac{B}{x}\right)$$

$$= \frac{2B}{x} + Ax - \frac{B}{x} - Ax - \frac{B}{x} \equiv 0. \quad \text{Stemmer!}$$

$y(1) = 2 = A + B$, $y'(1) = 4 = A - B$ gir $\underline{A = 3,\ B = -1}$.