MA 1101, H 2011

Ⓐ

Lösninger til oppgaver gitt på Test 1, Uke 37

Oppg. 3, s 10

Vi skal angi desimalutviklingen:

$$0.\overline{12}$$

som et rasjonalt tall – på den mest forkortede form. Vi har:

$$100 \cdot 0.\overline{12} = 12.\overline{12}$$
$$1 \cdot 0.\overline{12} = 0.\overline{12}$$

Differensen blir:

$$(100-1)\cdot 0.\overline{12} = 12$$

eller $99 \cdot 0.\overline{12} = 12$, d.v.s $0.\overline{12} = \frac{12}{99} = \underline{\underline{\frac{4}{33}}}$

Alternativ metode:

$$0.\overline{12} = \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{1}{10^5} + \frac{2}{10^6} + \cdots$$
$$= \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^5} + \cdots\right) + \left(\frac{2}{10^2} + \frac{2}{10^4} + \frac{2}{10^6} + \cdots\right)$$
$$= \frac{1}{10}\,\frac{1}{1-\frac{1}{10^2}} + \frac{2}{10^2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{10^2}} = \frac{10}{100-1} + \frac{2}{100-1}$$
$$= \frac{12}{99} = \underline{\underline{\frac{4}{33}}}$$

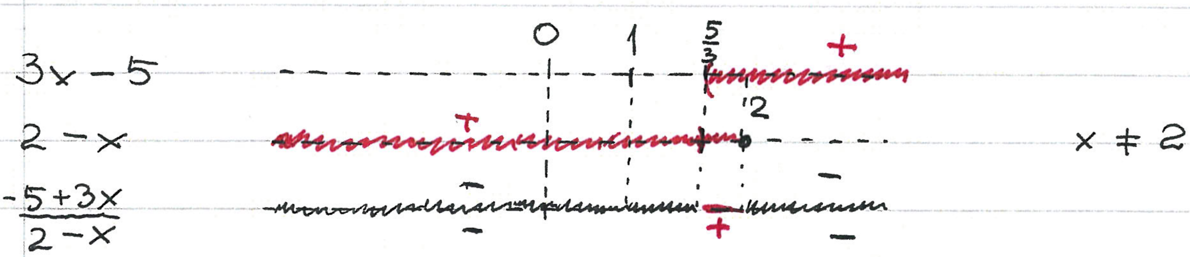
ved bruk av summeformelen for uendelig geometriske rekker.

Oppg. #19, s. 10

Vi skal bestemme löningsmengden for

$$\frac{1}{2-x} < 3 \iff \frac{1}{2-x} - 3 < 0$$

$$\iff \frac{1-6+3x}{2-x} < 0 \iff \frac{-5+3x}{2-x} < 0$$



$$\frac{-5+3x}{2-x} < 0 \quad \text{når} \quad \underline{x < \tfrac{5}{3}} \text{ og } \underline{\text{når} \quad x > 2}.$$

OPPG. # 15, s. 22

Vi skal bestemme området i xy-planet definert ved ulikhetene:

$$x^2 + y^2 < 2x \qquad \text{og} \qquad x^2 + y^2 < 2y \, ,$$

eller ekvivalent:

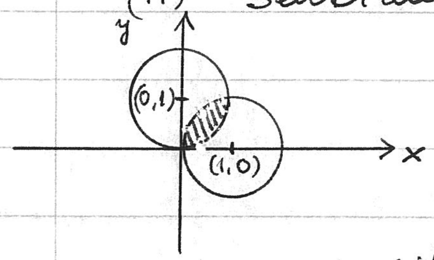
$$(x^2 - 2x + 1) + y^2 \quad 1 \qquad \text{og} \qquad x^2 + (y^2 - 2y + 1) \quad 1$$

$$\text{(i)} \quad (x-1)^2 + y^2 \quad 1 \qquad \text{og} \quad \text{(ii)} \quad x^2 + (y-1)^2 \quad 1$$

Dette er området som ligger innenfor begge sirklene:

(i) Sentrum i (1,0) og radius 1

(ii) Sentrum i (0,1) og radius 1

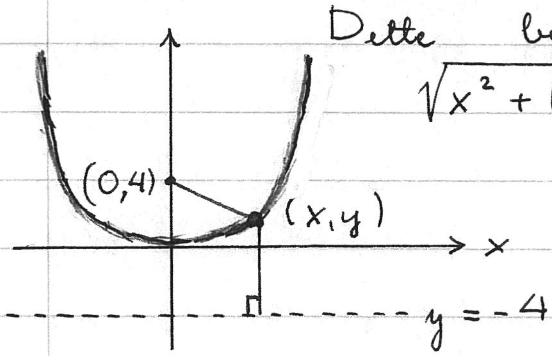


Angitt skravert på figuren. Randen er ikke inkludert p.g.a. ekte ulikheter. (Dette kan indikeres ved stiplet rand!)

OPPG # 21, s. 23

Vi skal bestemme ligningen for parabelen med fokus i (0,4) og direktrise $y = -4$

Punktene på parabelen skal da ha samme avstand fra (0,4) som til linjen $y = -4$.



Dette betyr at

$$\sqrt{x^2 + (y-4)^2} = y + 4$$

Kvadrering gir:

$$x^2 + (\cancel{y^2} - 8y + \cancel{16}) = \cancel{y^2} + 8y + \cancel{16}$$

$$\underline{x^2 = 16y}.$$

Ut fra Avsnitt P3 vet vi at kurven blir en parabel med hjörne i origo (0,0).

(c)

OPPG. # 5, s. 44

Vi skal finne alle röttene til ligningen:

$$16x^4 - 8x^2 + 1 = 0$$

Dette er et fullstendig kvadrat:

$$16x^4 - 8x^2 + 1 \equiv (4x^2 - 1)^2 \equiv \underline{(2x-1)^2(2x+1)^2}$$

Altså er röttene $\underline{x = \frac{1}{2} \text{ og } x = -\frac{1}{2}}$.

Begge rötter har <u>multiplisitet 2</u>.

OPPG. # 13, s. 56

Vi skal bevise at:

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$$

Vi har fra s. 47:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

og fra s. 51:

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x.$$

Dette gir:

$$\underline{\cos 2x} = \cos 2x \cdot 1 = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$= \underline{\cos^4 x - \sin^4 x}$$

VIKTIG OPPGAVE FRA ØVING 2:

OPPG. 16, s. 44

Vi skal omforme $\frac{x^4 + x^2}{x^3 + x^2 + 1}$ til summen av et polynom og en rasjonal funksjon med teller av lavere grad enn nevner.

$$(x^4 + x^2) : (x^3 + x^2 + 1) = x - 1$$
$$-(x^4 + x^3 + x)$$
$$-x^3 + x^2 - x$$
$$-(-x^3 - x^2 - 1)$$

<u>REST</u>: $2x^2 - x + 1$

$$\underline{\frac{x^4 + x^2}{x^3 + x^2 + 1} \equiv x - 1 + \frac{2x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 + 1}}$$

Kontroller ved å sette på felles brøkstrek!