Ⓐ

# MA 1101, H 2011.

## Lösninger til oppgaver fra Test 2, Uke 39

### OPPG 17, s.70

Vi skal avgjöre om

$$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$$

eksisterer og i så fall finne verdien.

Vi har

$$\frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \frac{\cancel{\sqrt{x} - 3}}{\cancel{(\sqrt{x} - 3)}(\sqrt{x} + 3)} \quad \text{for } x \neq 9 \text{ og } x > 0$$

Siden vi skal studere $\lim_{x \to 9}$ kan vi forutsette at $\mathcal{D}(f) = (0, 9) \cup (9, \infty)$.

Siden $\lim_{x \to 9} \frac{1}{\sqrt{x} + 3} = \frac{1}{6}$

har vi $\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \frac{1}{6}$ ut fra kjente regneregler for grenser.

### OPPG. 75, s.71

Vi har at $2 - x^2 \leq g(x) \leq 2\cos x$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Vi observer at

$$\lim_{x \to 0} (2 - x^2) = 2 = \lim_{x \to 0} 2\cos x .$$

Ut fra THE SQUEEZE THEOREM, s.69, har vi dermed at

$$\underline{\lim_{x \to 0} g(x) = 2.}$$

### OPPG. 57, s.71

$$\lim_{x \to a-} \frac{|x - a|}{x^2 - a^2} = \lim_{x \to a-} \frac{a - x}{x^2 - a^2} \quad (\underline{\text{siden } a > x})$$

NB!

$$= \lim_{x \to a-} \frac{(a - x)}{(x - a)(x + a)} = \lim_{x \to a-} \frac{-1}{x + a} = \underline{-\frac{1}{2a}}$$

(B)

OPPG. 31, s. 92:

Vi skal bevise at limes er entydig (hvis den eksisterer!) Vi antar derfor at det ikke er så, nemlig at

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \text{og} \quad \lim_{x\to a} f(x) = M$$

der $L \neq M$. Da er $|L-M| > 0$
– og vi kan velge $\varepsilon = \frac{1}{3}|L-M|$.
Ut fra den formelle definisjonen av grense finnes det $\delta_1 > 0$, s.a. når $x \in \mathcal{D}(f)$ og $0 < |x-a| < \delta_1$ så må:

$$(*) \qquad |f(x) - L| < \tfrac{1}{3}|L-M|$$

Av samme grunn finnes det et $\delta_2 > 0$ s.a. når $x \in \mathcal{D}(f)$ og $0 < |x-a| < \delta_2$ så må:

$$(**) \qquad |f(x) - M| < \tfrac{1}{3}|L-M|$$

For $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, $x \in \mathcal{D}(f)$ og $0 < |x-a| < \delta$, må både $(*)$ og $(**)$ gjelde:
Da har vi for slike $x$:

$$|M-L| = |(M - f(x)) + (f(x) - L)|$$

3-kant-ulikheten!

$$\leq |M - f(x)| + |f(x) - L|$$

$$< \tfrac{1}{3}|L-M| + \tfrac{1}{3}|L-M| = \tfrac{2}{3}|L-M|$$

Men dette er åpenbart umulig. Altså må:

$$L = M.$$

MERKNAD:

Dette er et argument som illustrerer nytten og nödvendigheten av den formelle definisjon av limes. Bruk, om nödvendig, tid på å forstå denne lösningen!!

(c)

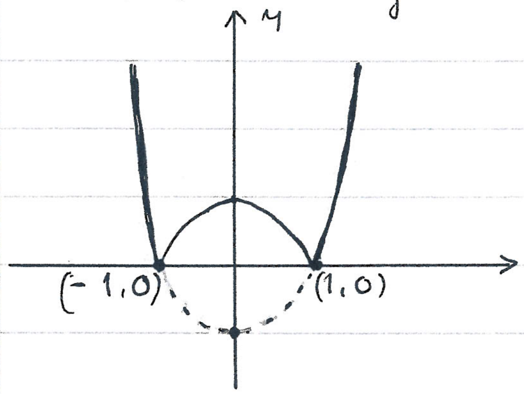
OPPG. 16, s. 99

Vi skal skissere grafen til funksjonen: $f(x) = |x^2 - 1|$ og avgjøre om den har en tangent for $x = 1$.

Om vi først skisserer kurven

$$y = x^2 - 1$$

får vi en parabel med topp-punkt i $(1, -1)$ og akse lik y-aksen.




P.g.a. | |-tegnet får vi bare ikke-negative y-verdier.

Vi må studere $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

$$\lim_{x \to 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1+} \frac{(x^2 - 1) - 0}{x - 1} = \lim_{x \to 1+} (x + 1) = \underline{\underline{2}}$$

$$\lim_{x \to 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1-} \frac{(1 - x^2) - 0}{x - 1} = \lim_{x \to 1-} -(1 + x) = \underline{\underline{-2}}$$

Siden $\lim_{x \to 1-} \neq \lim_{x \to +}$, eksisterer ikke

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$$

Altså har grafen ingen tangent for $x = 1$.

OPPG. 21, s. 99

Vi skal bestemme alle punkter på kurven:

$$y = x^3 - x + 1$$

der tangenten er parallell med linjen: $y = 2x + 5$.

Ⓓ

Dersom vi på dette punkt i kurset hadde kjent regnereglene fra avsnitt 2.3, kunne vi regnet som følger:

$$\frac{dy}{dt} = 3x^2 - 1$$

Vi skal bestemme $x$ slik at:

$$3x^2 - 1 = 2 \text{ (stigningstallet til linjen)}$$

$$3x^2 = 3 \quad ; \quad x = \pm 1$$

Punktene blir da: $\underline{(1,1)}$ og $\underline{(-1,1)}$.

Siden oppgaven er gitt i avsnitt 2.1 forventes det antagelig at vi skal beregne $f'(x)$ på følgende måte:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{((x+h)^3-(x+h)+1)-(x^3-x+1)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{3x^2h+3xh^2+h^3-h}{h} = \lim_{h\to 0}(3x^2-1) + \lim_{h\to 0}(3xh+h^2)$$

$$= \underline{3x^2-1}$$

OPPG 32, s.92

Vi skal bevise at når $\lim_{x\to a} g(x) = M$, så finnes det $\delta > 0$ s.a. når $x \in D(g), 0 < |x-a| < \delta$, så vil $|g(x)| < 1 + |M|$. Vi velger $\varepsilon = 1$.

Det finnes da $\delta > 0$ s.a. når $0 < |x-a| < \delta$ og $x \in D(g)$ så vil $|g(x) - M| < 1$. D.v.s.

$$-|M| - 1 \le M - 1 < g(x) < M + 1 \le |M| + 1$$

Hvis $g(x) \ge 0$ gir dette direkte:

$$|g(x)| < |M| + 1$$

Hvis $g(x) < 0$ får vi:

$$|g(x)| = -g(x) \le |M| + 1$$

av venstre ulikhet. D.v.s $g(x)$ er begrenset i $0 < |x-a| < \delta$.