MA1101, H 2011

Løsninger til oppgaver på Test 4, Uke 43

OPPG. 3, s. 159

Ⓐ

En partikkel beveger seg langs x-aksen s.a. posisjonen er gitt ved:

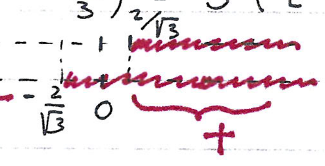
$$x(t) = t^3 - 4t + 1 \quad ; \quad t \overset{?}{>} 0, \; t \text{ tiden.}$$

$$x'(t) = 3t^2 - 4$$

$$x''(t) = 6t$$

(a) Vi skal finne tidsintervaller når $x'(t) > 0$; beveger seg mot høyre

$$x'(t) = 3\left(t^2 - \tfrac{4}{3}\right) = 3\left(t - \tfrac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(t + \tfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$$



(Beveger seg mot høyre +)

$x'(t) > 0$ når $t < -\frac{2}{\sqrt{3}}$ (hvis vi går tilbake i tid)

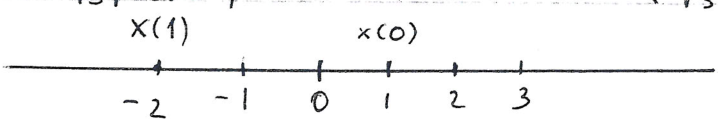
og $x'(t) > 0$ når $t > \frac{2}{\sqrt{3}}$

(b) $x'(t) < 0$ når $-\frac{2}{\sqrt{3}} < t < \frac{2}{\sqrt{3}}$ (Bevegelse mot venstre)

(c) $x''(t) > 0$ når $t > 0$. Akselerasjon mot høyre.

(d) $x''(t) < 0$ når $t < 0$. Akselerasjon mot venstre

(e)(f) Når x beveger seg mot venstre, d.v.s. $t \in \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, vil man i $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$ ha bremsing siden $x''(t) < 0$



Når x beveger seg mot høyre, d.v.s. $t < -\frac{2}{\sqrt{3}}$ eller $t > \frac{2}{\sqrt{3}}$. vil vi det første intervall ha bremsing siden $x''(t) < 0$, men for $t > \frac{2}{\sqrt{3}}$ vil farten øke siden $x''(t) > 0$.

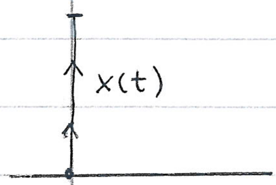
(g) $x'(t) = 0$ når $t = \frac{2}{\sqrt{3}}$: $x''\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{12}{\sqrt{3}}$.

$x'(t) = 0$ når $t = -\frac{2}{\sqrt{3}}$: $x''\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{12}{\sqrt{3}}$.

(h) Midlere hastighet i tidsintervallet $(0,4)$: $\dfrac{x(4) - x(0)}{4} = \dfrac{49 - 1}{4} = \underline{12}$

#5, s.159

$$y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 9.8 \text{ m/sek}$$



$$y(t) = 9.8t - 4.9t^2$$
$$y'(t) = 9.8 - 9.8t$$
$$y''(t) = -9.8 \quad \text{akselerasjon.}$$

Akselerasjon er uavhengig av t.

Hvor höyt går ballen? Den er på toppen når $y'(t) = 0$, d.v.s.

$$9.8 - 9.8t = 0 \quad \therefore \quad \underline{t = 1 \text{ sek}}$$

Da er höyden gitt ved:

$$y(1) = 9.8 \cdot 1 - 4.9 \cdot 1 = \underline{4.9 \text{ m}}.$$

Hva er farten når den når bakken?

$$0 = y(t) = 9.8t - 4.9t^2 = 4.9t(2-t)$$

$t = 0$ gir starten. $t = 2$ sek gir tiden det tar för den treffer bakken. Da blir $y'(2) = 9.8 - 9.8 \cdot 2 = \underline{-9.8 \text{ m/sek}}$

CHAPTER REVIEW

#25, s.160

Vi skal bestemme ligningen for tangenten til kurven $x^3y + 2xy^3 = 12$ i $(2,1)$

Innsetting gir: $8 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 = 12$. (Kontroll for å vise at det gitte punkt virkelig ligger på kurven!) Implisitt derivasjon gir:

$$3x^2y + x^3y' + 2y^3 + 2x \cdot 3y^2y' = 0 \quad \text{som gir}$$
$$3 \cdot 4 \cdot 1 + 8y' + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot y' = 0$$

(c)

som gir: $20y' = -14$ $\therefore$ $y' = -\frac{7}{10}$. Dette gir:

$$y - 1 = -\frac{7}{10}(x-2)$$

eller $-7x + 14 = 10y - 10$ $\therefore$ $\underline{7x + 10y = 24}$

#29, s.160

$$\int \frac{2 + 3\sin x}{\cos^2 x}\,dx = 2\int \frac{dx}{\cos^2 x} + 3\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$$

$$= \underline{2\tan x + 3(\cos x)^{-1} + K}$$

#29, s.173

Vi skal löse ligningen

$$\log_4 (x+4) - 2\log_4 (x+1) = \frac{1}{2}$$

m.h.p. x. Vi minner om at

$$\frac{1}{2} = \log_4 2 \quad \text{siden} \quad 4^{1/2} = 2.$$

Altså har vi:

$$\log_4 \frac{(x+4)}{(x+1)^2} = \log_4 2$$

eller ekvivalent: $\frac{x+4}{(x+1)^2} = 2$, som gir:

$$x + 4 = 2(x^2 + 2x + 1)$$

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1}{4}\left[-3 \pm \sqrt{9 - 4\cdot 2(-2)}\right] = \frac{1}{4}[-3 \pm 5] = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -2 \end{cases}$$

Siden $\log_4(x+1)$ inngår i den opprinnelige ligningen, må $x + 1 > 0$. M.a.o. må $x = -2$ forkastes som løsning. Den entydige løsning blir derfor:

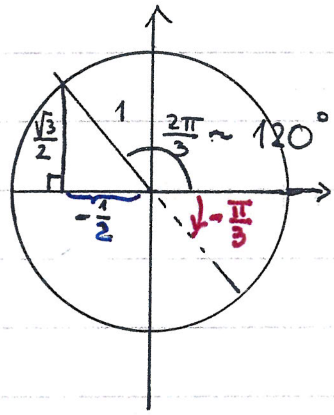
$$\underline{x = \frac{1}{2}}$$

D

#7, s. 197

Vi skal regne ut: $y = \tan^{-1}\left(\tan \frac{2\pi}{3}\right)$

Vi har at $\tan \frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



Siden $\mathcal{D}(\tan^{-1}) = \mathbb{R}$ og $\mathcal{R}(\tan^{-1}) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, får vi:

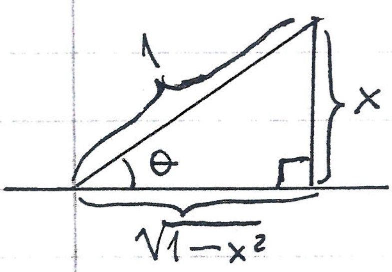
$$y = \tan^{-1}\left(\tan \frac{2\pi}{3}\right)$$
$$= \tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \underline{-\frac{\pi}{3}}$$

#45, s. 197

Vi skal bevise at

$$\sin^{-1} x = \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \quad \text{når } |x| < 1$$

For $0 \leq x < 1$ har følgende figur:



$\sin\theta = x/1 \iff$

$\theta = \sin^{-1} x$ som gir:

$\tan\theta = x/\sqrt{1-x^2}$

$\theta = \tan^{-1}(x/\sqrt{1-x^2})$

For $x < 0$ har vi: $\sin^{-1} x = -\sin^{-1}(-x)$

$= -\tan^{-1}\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ siden både $\sin^{-1}$ og $\tan^{-1}$ er <u>odde</u>.

siden $-x > 0$