MA 1101, ØVING 9, H2011

Uke 43 ($^{24}/_{10}$ - $^{28}/_{10}$)

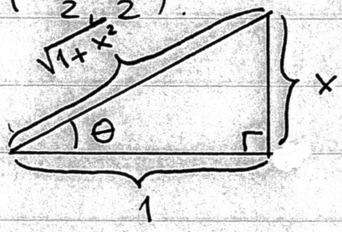
3.5

1. **# 15, s. 197**

Vi skal forenkle uttrykket:

$$\cos(\tan^{-1} x).$$

Vi bemerker først at $\mathcal{R}(\tan^{-1} x) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Vi velger først $x \in (0, 1)$.



Da blir $\theta = \tan^{-1} x \in (0, \frac{\pi}{2})$ på figuren og

$$\cos(\tan^{-1} x) = 1/\sqrt{1+x^2}$$

Anta så at $x \in (-1, 0)$. Da har vi:

$$\cos(\tan^{-1} x) = \cos(-\tan^{-1}(-x)) = \cos(\tan^{-1}(-x))$$
$$= 1/\sqrt{1+x^2}, \quad \text{siden } -x > 0.$$
$$\cos(\tan^{-1} 0) = \cos 0 = 1 = 1/\sqrt{1+0^2}$$

Altså er $\underline{\cos(\tan^{-1} x) = 1/\sqrt{1+x^2}}$ for alle x.

2 **# 31, s. 197**

Vi skal derivere

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} + a \arcsin \frac{x}{a} \quad ; \quad a > 0$$

$D(f) = [-a, a]$. Vi har:

$$y' = \frac{1}{2} \frac{-2x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \cancel{a} \cdot \frac{1}{\cancel{a}} \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}}$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (\text{siden } a > 0)$$

$$= \frac{a - x}{\sqrt{(a-x)(a+x)}} = \underline{\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}}$$

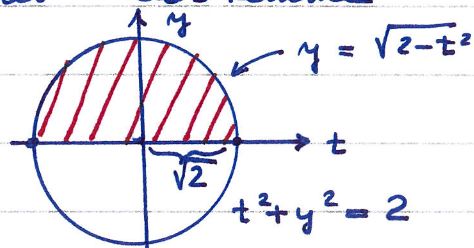
MA1101, ØVING 10, H2011

Uke 44 (31/10 – 4/11)

5.4

3 # 7, s. 310

Vi skal se på betydningen av
$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-t^2}\,dt$$
som areal, og derav bestemme verdien. Integralet gir dermed arealet av halvsirkelen skravert på figuren.



$$A = \tfrac{1}{2}\pi r^2 = \tfrac{1}{2}\pi\cdot(\sqrt{2})^2 = \pi = \underline{\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-t^2}\,dt}$$

#9, s. 310

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x^3)\,dx = \int_{-\pi}^{0} \sin(x^3)\,dx + \int_{0}^{\pi} \sin(x^3)\,dx$$

Siden sin og x^3 begge er odde funksjoner, får vi:
$$\int_{-\pi}^{0} \sin(x^3)\,dx = -\int_{0}^{-\pi} \sin(x^3)\,dx = \int_{0}^{\pi} \sin(-x^3)\,dx$$
$$= -\int_{0}^{\pi} \sin x^3\,dx.$$
Altså er
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x^3)\,dx = -\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x^3)\,dx$$
d.v.s.
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x^3)\,dx = \underline{0}$$
eller direkte fra Teorem 3,(h), s. 306.

#19, s. 310

$$\int_{-2}^{2} (4-t^2)\,dt \overset{\text{like funksjon}}{=} 2\int_{0}^{2}(4-t^2)\,dt = 2\left(4t-\frac{t^3}{3}\right)\Big|_{0}^{2} = \underline{\frac{32}{3}}$$

#36, s311

Vi skal beregne $\int_0^3 |2-x|\,dx$.

For $0 \le x < 2$ er $|2-x| = 2-x$

For $\le x \le 3$ er $|2-x| = x-2$

Vi har derfor:

$$\int_0^3 |2-x|\,dx = \int_0^2 (2-x)\,dx + \int_2^3 (x-2)\,dx$$

$$= \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_2^3 = 2 + \left(\frac{9}{2}-6\right) - \left(\frac{4}{2}-4\right)$$

$$= 2 - \frac{3}{2} + 2 = 4 - \frac{3}{2} = \underline{\frac{5}{2}}$$

5.5

#7, s. 315

$$\int_{-2}^{2} (x^2+3)^2\,dx = \int_{-2}^{2} (x^4 + 6x^2 + 9)\,dx$$

$$= \left(\frac{x^5}{5} + \frac{6x^3}{3} + 9x\right)\Big|_{-2}^{2} = \left(\frac{x^5}{5} + 2x^3 + 9x\right)\Big|_{-2}^{2}$$

$$= \left(\frac{32}{5} + 16 + 18\right) - \left(-\frac{32}{5} - 16 - 18\right)$$

$$= \frac{64}{5} + 68 = \frac{64}{5} + \frac{340}{5} = \frac{404}{5}$$

(Her kunne vi forenklet regningen litt ved å benytte at integranden er en like funksjon.)

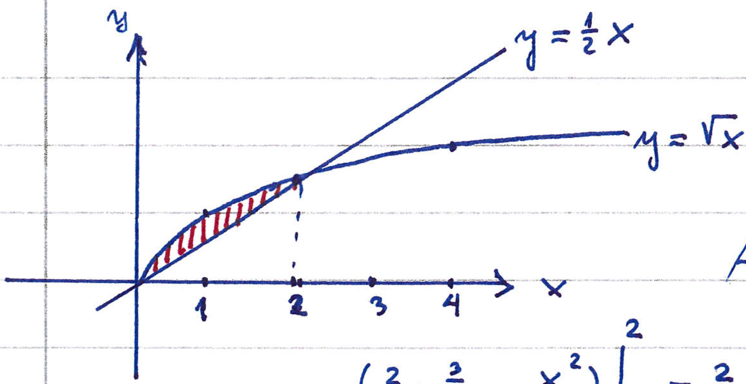
#17, s. 316

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = (\arctan x)\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \underline{\frac{\pi}{2}}$$

4 #26, s. 316

Vi skal beregn arealet som ligger under $y = \sqrt{x}$ og over $y = \frac{x}{2}$

Vi må lagen en skisse.

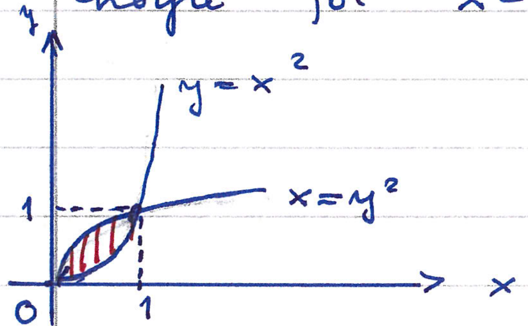


$$A = \int_0^2 \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right) dx$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{4}\right)\Big|_0^2 = \frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{2} - \frac{4}{4} = \underline{\frac{4}{3}\sqrt{2} - 1}$$

#27, s. 316:

Vi skal beregne arealet av flatestykket over $y = x^2$ og til høyre for $x = y^2$.



$$A = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

#39, s. 316

$$\frac{d}{dx}\int_2^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \underline{\frac{\sin x}{x}}$$

ut fra fundamental-teoremet siden $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ er kont. på $[2, x]$.

5

#44, s. 316:

$$\frac{d}{d\theta}\int_{\sin\theta}^{\cos\theta} \frac{dx}{1 - x^2} \overset{*}{=} \frac{1}{1-\cos^2\theta}\cdot(-\sin\theta) - \frac{1}{1-\sin^2\theta}(\cos\theta)$$

$$= -\frac{\sin\theta}{\sin^2\theta} - \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta} = -\frac{1}{\sin\theta} - \frac{1}{\cos\theta}$$

$$= \underline{\frac{-\cos\theta - \sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}}$$

*(Ut fra formel øverst på s. 315)

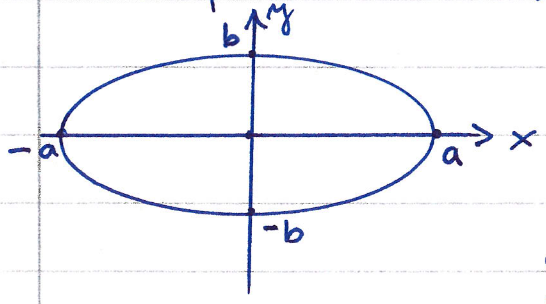
6

48, s.323

Vi skal uttrykke arealet innenfor ellipsen

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

som et bestemt areal. Deretter skal vi foreta en substitusjon som endrer integralet s.a. det representerer areal innenfor en sirkel.



$$A = 2\int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx$$

Vi innfører $u = \frac{x}{a}$

og får $dx = a\,du$

Da blir grensene -1 og 1

$$A = 2\int_{-1}^{1} b\cdot a\sqrt{1-u^2}\,du$$

$$= 2a\cdot b\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}\,du$$

$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}\,du$ = arealet av halvsirkel med radius 1. Altså:

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}\,du = \frac{1}{2}\pi\cdot 1^2$$

M.a.o. får vi: $A = 2a\cdot b\,\frac{1}{2}\pi = \underline{\pi ab}$