MA1102 Grunnkurs i analyse II

Eksamen 19/5-04, LØSNING:

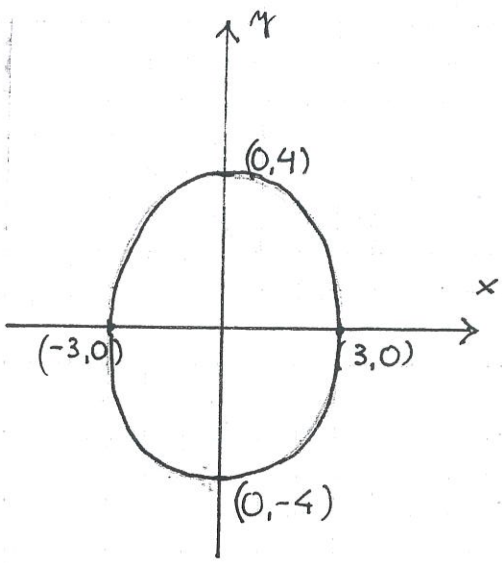
(Gjennomgåelse i plenum 18/5-05)

OPPGAVE 1:

Kurven på parameterform:

$$x = 3\sin t\,,\quad y = 4\cos t\quad;\ -\pi \le t \le \pi.$$

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = \sin^2 t + \cos^2 t = \underline{1}$$



Dette er altså en ellipse med sentrum i origo og halvakser 3 og 4.

OPPGAVE 2:

$$y' - \frac{2y}{x} = x^2\quad;\quad y(1) = 3$$

$$\mu(x) = -\int \frac{2}{x}\,dx = -2\ln|x| + C$$

Velger $C = 0$ og får

integrerende faktor: $e^{\mu(x)} = 1/x^2$.

Multipliseres ligningen med $e^{\mu(x)}$, får vi:

$$y'\cdot\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}y = 1 \quad\text{eller}\quad \frac{d}{dx}\left(y\cdot\frac{1}{x^2}\right) = 1$$

Integrasjon gir:

$$\frac{y}{x^2} = \int 1\,dx = x + K$$

$$y = x^3 + Kx^2$$

(Kontroll: $y' = 3x^2 + 2Kx\,,\ -\frac{2y}{x} = -2x^2 - 2Kx$

$y' - \frac{2y}{x} = 3x^2 + 2Kx - 2x^2 - 2Kx = x^2$. ok)

Initialbetingelsen gir:

$3 = y(1) = 1^3 + K\cdot 1^2 = 1 + K$; d.v.s. $K = 2$.

Lösningen blir derfor:

$$\underline{y = x^3 + 2x^2}$$

(MA1102, Eks. 19/5-04, lösn. forts.)

OPPGAVE 3:

Vi betegner rom-temperaturen y_R (som altså er konstant.) Siden gjenstanden er varmere må $y(0) > y_R$

(a) Newtons avkjølingslov gir derfor:

$$\frac{dy}{dt} = k(y_R - y) \qquad (y_R = 19°C)$$

der $k > 0$. (Det er klart at $y'(t)$ er negativ og siden $y_R - y$ er negativ i starten må $k > 0$). Dette er en separabel differensial-ligning.

(b) Vi löser differensialligningen i (a) for å få den allmenn lösning:

$$\int \frac{dy}{y_R - y} = k \int dt$$

$$-\ln|y_R - y| = kt + C$$

Antilogaritme på begge sider gir:

$$\frac{1}{y - y_R} = Ce^{kt}$$

eller:
$$y - y_R = Ke^{-kt}$$
$$y = y_R + Ke^{-kt}$$

Vi får opplyst at $y_R = 19°C$, mens $y(0) = 79°C$. Dette gir:

$$79 = y(0) = 19 + K \cdot 1 \quad \therefore \quad K = 60$$

Altså har vi:

$$y(t) = 19 + 60e^{-kt}$$

Videre har vi:

$$46 = y(5) = 19 + 60e^{-5k}$$

(MA 1102, Eks. 19/5-04, lösn. forts.)

Dette gir: $60e^{-5k} = 27$; $e^{-5k} = \frac{9}{20}$

Vi vil beregne:

$$\underline{y(10)} = 19 + 60e^{-10k} = 19 + 60(e^{-5k})^2$$
$$= 19 + 60\left(\frac{9}{20}\right)^2 = 19 + 3\cdot\frac{81}{20} = 19 + 12.15$$
$$= \underline{31.15\,°C}$$

OPPGAVE 4:

Löser initialverdi-problemet:

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \;;\; y(0) = 1,\; y'(0) = 2$$

Den tilordnede algebraiske ligning:

$$r^2 - 4r + 4 \equiv (r-2)^2 = 0$$

gir dobbelroten $r = 2$. Den allmenne løsning blir dermed:

$$y = e^{2x}(Ax + B)$$
$$y' = 2e^{2x}(Ax + B) + e^{2x}\cdot A$$
$$= e^{2x}(2Ax + (2B + A))$$

Initialbetingelsene gir:

$$1 = y(0) = e^0(0 + B) \quad \therefore \quad B = 1$$
$$2 = y'(0) = e^0(0 + 2B + A) = 2 + A \quad \therefore \quad A = 0$$

Den søkte løsning blir dermed:

$$\underline{y = e^{2x}}$$

OPPGAVE 5:

(a) Vi må avgjøre om

$$\lim_{T\to\infty} \int_2^T \frac{dx}{x\ln x} \quad \text{eksisterer}$$

Vi substituerer $u = \ln x$, $du = \frac{dx}{x}$ i det ubestemte integralet:

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + K = \ln|\ln x| + K$$

(MA1102, Eks. 19/5-04, lösn. forts.)

Vi har derfor:

$$\int_2^T \frac{dx}{x \ln x} = \ln(\ln x)\Big|_2^T = \ln(\ln T) - \ln(\ln 2)$$

Siden $\ln(\ln T) \to \infty$ når $T \to \infty$, vil integralet:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln x} \quad \underline{\text{divergere.}}$$

(b) Rekken $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ divergerer siden $\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln x}$ divergerer i følge (a) – ut fra integraltesten.

<u>OPPGAVE 6:</u>

(i) <u>R</u>. (Kommentar: "bare hvis" betyr:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerer} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Se ellers det korte, elegante bevis s. 533, Adams)

(ii) <u>R</u> (Kommentar: Dette er bare en reformulering av (i): $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer. Men generelt har vi alltid:

$$P \Rightarrow Q \text{ er ekvivalent med: ikke } Q \Rightarrow \text{ikke } P.)$$

(iii) <u>G</u> (Kommentar: I dette tilfellet er rekken $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ den harmoniske rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ som vi vet divergerer.)

(iv) <u>R</u> (Kommentar: Vi har $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, og har derfor n.te partialsum:

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\tfrac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Altså $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$.)

(v) <u>G</u>

(Moteksempel: $a_n = (-1)^{n-1}/n$, da er $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$)

(MA1102, Eks. 19/5-04, løsn. forts.)

(vi) G (For $x = 1$ har vi rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ som divergerer ut fra sammenligning med den harmoniske rekke eller ved Eks. 1, s. 536, Adams.)

(vii) R (Vi får her rekken:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

konvergerer ut fra TEOREM 14, s. 548, Adams; summen er $\frac{\pi}{4}$ i følge Eks. 5, s. 562, Adams. Dette er den velkjente Gregory / Leibniz - formelen.)