MA1102, EKSAMEN 24/5-05

LØSNINGER:

OPPGAVE 1:

(a) Vi skal bestemme den allmenne løsning for differensial-ligningen:

$$y'' + 2y' + 3y = 0$$

Den tilhørende algebraisk ligning:

$$r^2 + 2r + 3 = 0$$

har røtter: $r = \frac{1}{2}[-2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 1\cdot 3}] = \begin{cases} -1+i\sqrt{2} \\ -1-i\sqrt{2} \end{cases}$

Den allmenne løsning blir derfor:

$$\underline{y = e^{-x}(A\cos(\sqrt{2}x) + B\sin(\sqrt{2}x))}$$

(b)

Vi skal løse initialverdi-problemet:

$$y' + y = x \quad ; \quad y(0) = 2$$

Vi må finne integrerende faktor $e^{\mu(x)}$ der $\mu(x) = \int 1\,dx = x$ (der vi velger å sette integrasjonskonstanten lik 0.) Altså:

$$e^x y' + e^x y = e^x \cdot x$$

eller: $\frac{d}{dx}(e^x y) = e^x \cdot x$

som gir:

$$e^x y = \int x e^x dx = x e^x - \int 1 \cdot e^x dx$$

$= x e^x - e^x + K$ som gir allmen løsning: $y = x - 1 + Ke^{-x}$. Videre har vi: $2 = y(0) = 0 - 1 + Ke^0 = -1 + K$.

Dette gir $K = 3$. Den spesielle løsning som er løsning for vår initialproblem blir dermed:

$$\underline{y = x - 1 + 3e^{-x}}$$

(MA1102, Eks. 24/5-05, løsn. forb.)

OPPGAVE 2:

(a) Vi skal regne ut det ubestemte integralet: $\int \frac{du}{1-u^2}$. Siden

$1-u^2 = (1-u)(1+u)$ har vi en delbrøk-oppspaltning av følgende type:

$$\frac{1}{1-u^2} \equiv \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u} \equiv \frac{A+Au+B-Bu}{1-u^2}$$

$$\equiv \frac{(A+B)+(A-B)u}{1-u^2}$$ Dette gir da lignings-systemet:

$$A+B=1$$
$$A-B=0$$

som gir: $A = B = \frac{1}{2}$

Integrasjonen:

$$\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\int\frac{du}{1-u} + \frac{1}{2}\int\frac{du}{1+u}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|1-u| + \frac{1}{2}\ln|1+u| + C$$

$$= \underline{\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C}$$

(b) Vi skal regne ut det bestemte integralet:

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

Vi substituerer her: $x = 2\sin t$ og får: $dx = 2\cos t\,dt$, $\sqrt{4-x^2} = 2\sqrt{1-\sin^2 t} = 2\cos t$ (Her ville vi generelt ha $\sqrt{1-\sin^2 t} = |\cos t|$, men siden $0 \le x \le \sqrt{2}$, må vi ha $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$ og da blir $\cos t > 0$. Vi får da videre:

(MA1102, Eks. 24/5-05, lösn. forts.)

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \frac{(2\sin t + 1)\,2\cancel{\cos t}}{2\cancel{\cos t}}\,dt$$

$$= \int (2\sin t + 1)\,dt = -2\cos t + t + K$$

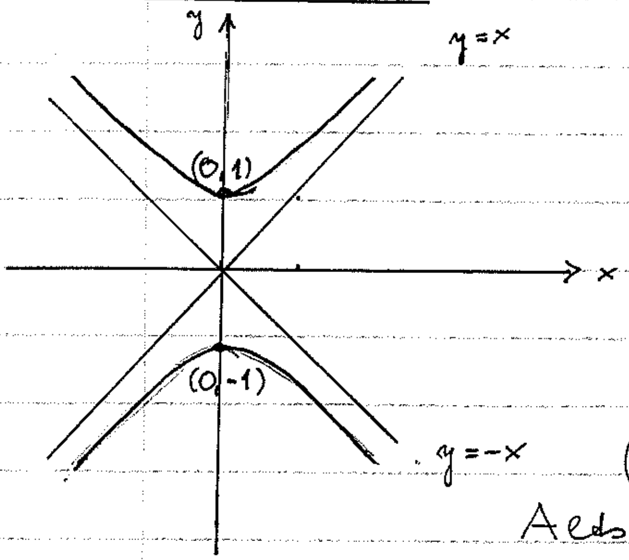
$$= -2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + \sin^{-1}\frac{x}{2} + K$$

$$= -\sqrt{4-x^2} + \sin^{-1}\frac{x}{2} + K$$

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = -\sqrt{4-x^2}\Big|_0^{\sqrt{2}} + \sin^{-1}\frac{x}{2}\Big|_0^{\sqrt{2}}$$

$$= -\sqrt{2} + 2 + \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} - 0 = \underline{\underline{\frac{\pi}{4} + 2 - \sqrt{2}}}$$

OPPGAVE 3:



(a) Kurven er en hyperbel med asymptoter: $y = x$ og $y = -x$. y-aksen er akse siden kurven åpenbart ikke skjærer x-aksen.

(b) $\left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25-9}{16} = 1$

Altså er $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$ et kurvepunkt.

Den øverste grenen av hyperbelen har ligningen: $y = \sqrt{1+x^2}$ med derivert:

$$y' = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{y}$$

Stigningstallet for tangenten i $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$ blir:

$$y'\left(\tfrac{3}{4}\right) = (3/4)/(5/4) = \frac{3}{5}$$

Ligningen for tangenten blir dermed:

$$y - \frac{5}{4} = \frac{3}{5}\left(x - \frac{3}{4}\right)$$

eller $\underline{y} = \frac{3}{5}x - \frac{9}{20} + \frac{25}{20} = \underline{\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}}$

Skjæring mellom kurven $y^2 - x^2 = 1$ og tangenten bestemmen ved eliminasjon av y mellom de to

(MA1102, Eks. 24/5-05, lösn. forts.)

ligningene:

$$\left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}\right)^2 - x^2 = 1$$

som gir:

$$\frac{9}{25}x^2 + \frac{24}{25}x + \frac{16}{25} - x^2 = 1$$

eller:

$$\frac{16}{25}x^2 - \frac{24}{25}x + \frac{9}{25} = 0$$

eller:

$$\left(\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}\right)^2 = 0$$

som har dobbelroten: $x = \frac{3}{4}$. Altså finnes det ingen annen lösning enn den som svarer til berøringspunktet $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$.

OPPGAVE 4:

Vi skal avgjöre om integralet

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{x+1}\,dx$$

konvergerer eller divergerer. Vi observerer at $\lim_{x \to -1+} e^x/(x+1) = \infty$ og at integranden er kontinuerlig i $]-1,1]$. Vi må derfor avgjöre om

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-1+\varepsilon}^{1} \frac{e^x}{x+1}\,dx$$ eksisterer eller ikke.

Vi har: $e^x/(x+1) > e^{-1}(x+1)$ i det halvåpne intervallet $]-1,1]$. Vi har videre:

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-1+\varepsilon}^{1} \frac{e^x}{x+1}\,dx > \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-1+\varepsilon}^{1} \frac{e^{-1}}{x+1}\,dx$$

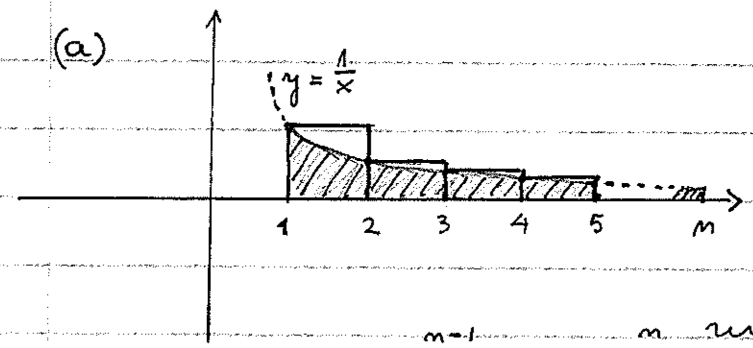
$$= e^{-1} \lim_{\varepsilon \to 0+} \left[\ln(2) - \ln(1-1+\varepsilon)\right] = \infty$$

(MA1102, Eks. 24/5-05, lösn. forb.)

Altså divergerer integralet $\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{x+1}\,dx$

OPPGAVE 5:

(a)



Vi ser av figuren at summen av rektanglenes areal er større enn arealet under kurven skravert.

Dette gir: $\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j}\cdot 1 > \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n$. Siden $\lim_{n\to\infty} \ln n = \infty$, må $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$ divergere. (Integraltesten!)

(b) At rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer betyr at $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$, der $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Det innsees da lett at også $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$. Vi har dessuten:

$$a_n = s_n - s_{n-1}.$$

Dette gir: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) \overset{\boxed{\text{regneregel fra følger}}}{=} s - s = 0$

(c) Implikasjonen kan ikke snues. Moteksempel: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerer og $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

(d) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5+2^n}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1 + 5/2^n}{1}\right)$

$= \frac{1}{2} \neq 0$. Ut fra (b) kan vi dermed slutte at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+2^n}{2^{n+1}}$ divergerer.