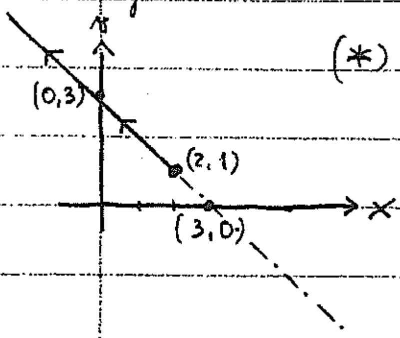
LØSNINGER

1

$x = 2 - t \quad , \quad y = t + 1 \ ; \quad t = y - 1$

gir $\quad x = 2 - (y-1) = 3 - y \quad$ eller



$(*) \quad x + y = 3$

$t = 0$ gir $x = 2, y = 1$

$t = 1$ gir $x = 1, y = 2$

$t = 2$ gir $x = 0, y = 3$

Kurven er strålen av $(*)$ som starter i $(2,1)$ og har orientering som angitt på skissen.

2

(a) $\quad y'' + y' - 2y = 0$

har tilhörande algebraisk ligning.

$r^2 + r - 2 = 0$ med rötter $r = \frac{1}{2}\left[-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1(-2)}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[-1 \pm 3\right] = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$; med allmän lösning

$$\underline{y = C_1 e^{t} + C_2 e^{-2t}}$$

(b) $\quad y' = C_1 e^{t} - 2C_2 e^{-2t}$

Initialbetingelsen gir:

$$\begin{array}{rcl|l} 2 = y(0) & = & C_1 + C_2 & +1 \\ -1 = y'(0) & = & C_1 - 2C_2 & -1 \\ 3 & = & 3C_2 & \therefore \ \underline{C_2 = 1} \end{array}$$

$2 = C_1 + 1$ gir $\underline{C_1 = 1}$

Den sökte partikular-lösning blir derfor:

$$\underline{y = e^{t} + e^{-2t}}$$

3

(a) $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} \quad \therefore \quad \int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} \ , \quad \ln|y| = \frac{1}{2}\ln|x| + \ln|K|$ som gir: $\quad y = Kx^{\frac{1}{2}}$.

Løsn. (forts.)

$1 = y(1) = K \quad \therefore \quad \underline{y = x^{\frac{1}{2}}} \quad ; \quad \underline{x > 0}$

(b) $$x^2 y' + 2xy = e^x$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 y) = e^x \qquad \text{(VIKTIG OBSERVASJON!)}$$

$$x^2 y = e^x + K$$

$$y = \frac{e^x + K}{x^2}$$

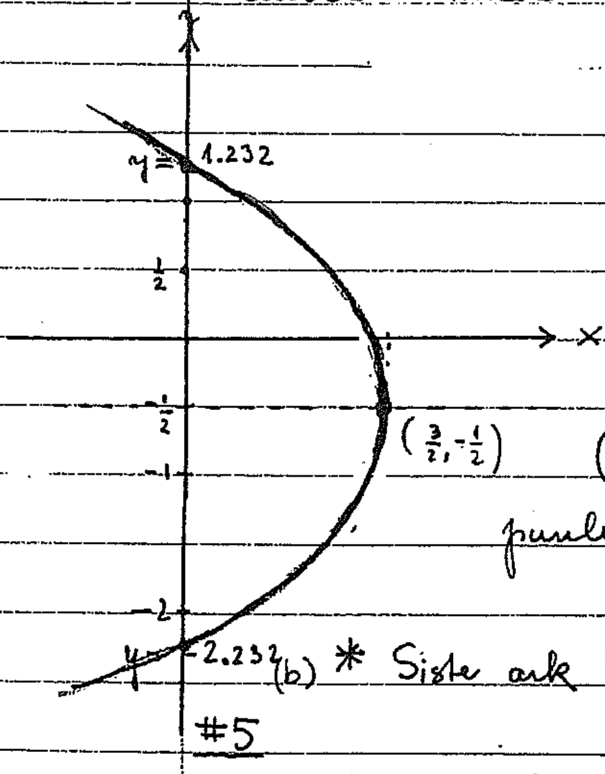
#4

(a) $$x + 2y + 2y^2 = 1$$

$$x - 1 = -2\left(y^2 + y + \tfrac{1}{4}\right) + \tfrac{1}{2} \qquad \text{Se boken s. 479}$$

$$\underline{x - \tfrac{3}{2} = -2\left(y + \tfrac{1}{2}\right)^2} \quad \text{eller:} \quad \left(y + \tfrac{1}{2}\right)^2 = -\tfrac{1}{2}\left(x - \tfrac{3}{2}\right)$$

Parabel med hjørne i $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$



Skal ligningen ha løsninger må $x \leq \frac{3}{2}$ siden høyresiden er ≤ 0. $x = 0$ gir $y = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. Aksen er derfor $y = -\frac{1}{2}$.

(Det spørres ikke er brennpunktet $F = \left(\frac{11}{8}, -\frac{1}{2}\right)$ og styrelinjen $x = \frac{13}{8}$.)

(b) * Siste ark!

#5

(a) $$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right) = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x$$

$$\cosh^2 x - 1 = \tfrac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - 1 = \tfrac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-x})$$

$$= \sinh^2 x$$

(b) $$\left.\begin{aligned} t &= \cosh x = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ \pm\sqrt{t^2 - 1} &= \sinh x = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \end{aligned}\right\} \text{addisjon gir:}$$

En unøyaktighet i oppgaveteksten her!

$$t \pm \sqrt{t^2 - 1} = e^x \quad ; \quad x = \ln\left(t \overset{\text{NB!}}{\pm} \sqrt{t^2 - 1}\right)$$

(− tegn gjelder for negativ x
 + " " " positiv x)

(c) $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}}$; $t > a > 0$

Vi innfører $t = a\cosh x$ og får

$dt = a \sinh x\, dx$ som gir:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}} = \int \frac{\cancel{a}\sinh x\, dx}{\cancel{a}\sqrt{\cosh^2 x - 1}} = \underline{\pm\int dx} = \pm x + C$$

Vi har $\frac{t}{a} = \cosh x$ og får dermed

som i (b)

$$\frac{t}{a} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\pm\sqrt{\left(\frac{t}{a}\right)^2 - 1} = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$\boxed{\begin{array}{l}+ \text{ tegnet gjelder for } x > 0 \\ - \text{ tegnet gjelder for } x \leq 0\end{array}}$

Addisjon gir: $e^x = \frac{t}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{t}{a}\right)^2 - 1}$

eller $x = \ln(t \pm \sqrt{t^2-a^2}) - \ln a$

Altså: $$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}} = \underline{\pm\ln(t \pm \sqrt{t^2-a^2}) + K}$$

(NB! Begge fortegnsvalg $+/+$ og $-/-$ gir rett svar.)

#6

(a) $r = F(\theta)$, gir $x = F(\theta)\cos\theta$, $y = F(\theta)\sin\theta$

$\theta \in [\alpha, \beta]$. Vi har da:

$$x'(\theta) = F'(\theta)\cos\theta - F(\theta)\sin\theta$$

$$y'(\theta) = F'(\theta)\sin\theta + F(\theta)\cos\theta$$

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}\, d\theta =$$

$$\int_\alpha^\beta [F'(\theta)^2\cos^2\theta - 2F'(\theta)F(\theta)\cos\theta\sin\theta + F(\theta)^2\sin^2\theta + F'(\theta)^2\sin^2\theta + 2F'(\theta)F(\theta)\sin\theta\cos\theta + F(\theta)^2\cos^2\theta]^{1/2}\, d\theta$$

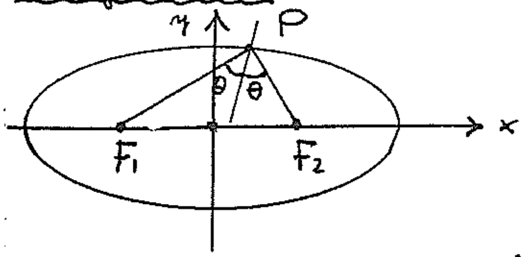
$$= \underline{\int_\alpha^\beta \sqrt{F'(\theta)^2 + F(\theta)^2}\, d\theta}$$

(b) $r = \theta^2$, $r'(\theta) = 2\theta$; $L = \displaystyle\int_0^\pi \sqrt{\theta^4 + 4\theta^2}\, d\theta$

$$= \int_0^\pi \theta(\theta^2+4)^{1/2} d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi 2\theta(\theta^2+4)^{1/2} d\theta = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{3}[\theta^2+4]^{3/2}\Big|_0^\pi$$

$$= \underline{\frac{1}{3}[(\pi^2+4)^{3/2} - 8]}$$

Oppg. # 4(b)



Strålene F_1P og F_2P danner samme vinkel med normalen til ellipsen i punktet P, der P er et vilkårlig punkt på ellipsen.

Roteres ellipsen om x-aksen får vi en rotasjonsellipsoide. Dersom denne belegges med et reflekterende lag på innsiden vil en lys-stråle fra F_1 reflekteres i P slik at den reflekterte stråle treffer F_2 (eller omvendt.)

KOMMENTARER:

#2 (a) For å sjekke at 2.gradsligningen er riktig løst bør man sette inn og se om r^2+r-2 virkelig blir lik 0. (b) Samme råd når det gjelder bestemmelse av C_1 og C_2 (Altfor mange regner feil på slike elementære ting!)

#3 (a) Mange starter riktig - og roter så med $e^{\frac{1}{2}\ln x}$ og lignende. Skriv: $e^{\alpha \ln x}$ på formen $(e^{\ln x})^{\alpha}$ og husk at $e^{\ln x} = x$.

(b) Her ser man typisk eksempel på at mange heller vil pugge den tungvinte formelen: $y(x) = e^{-\mu(x)}\int e^{\mu(x)} q(x)\,dx$ enn å tenke over hva metoden egentlig gikk ut på! I denne oppgaven er venstresiden allerede på formen

$$\frac{d}{dx}(x^2 y).$$

Dermed er alt arbeidet med å finne integrerende faktor helt borthastet.
Metoden - riktig brukt - fører bare til at man kommer tilbake til det samme uttrykket man startet med!!
Dette var understreket sterkt på en forelesning! (Muligens en torsdag 8^{15}-10??)

#4

(a) Når x bare forekommer i 1. potens og y i 2. potens (eller omvendt) følger det straks at kjeglesnittet er en parabel.
Standardformene som en helst bør komme fram til finnes i tabell 1, s 479, i boken.
Av denne tabellen sammenholdt med fig 8.3 kan en da lett lese direkte ut hva som er hjørne, brennpunkt, styrelinje. Her er det kanskje lurt å innføre:

$$X = x - \frac{3}{2}\ , \qquad Y = y + \frac{1}{2}$$

i vår oppgave.

(b) Egenskapen er en konsekvens av at ved refleksjon er innfallsvinkel lik utfalls-vinkel.

#5

Både (a) og (b) ble gjennomgått på forelesning!
En tilsvarende oppgave til (c) er også regnet på forelesning og øving.

#6 Både (a) og (b) er regnet på forelesning.