(A)

MA 1102

MIDTSEMESTER - PRØVE 8/3-05

LØSNINGER:

#1 Den algebraiske ligning:

$$r^2 - 2r - 3 = 0$$

$$r = \tfrac{1}{2}\left[2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 1\cdot(-3)}\right] = \tfrac{1}{2}\left[2 \pm 4\right] = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

Allmenn lösning blir:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$$

$$y' = 3C_1 e^{3x} - C_2 e^{-x}$$

$$\left.\begin{aligned} 3 &= y(0) = C_1 + C_2 \\ 1 &= y'(0) = 3C_1 - C_2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &4C_1 = 4 \; \therefore \; \underline{C_1 = 1}, \\ &\underline{C_2} = 3C_1 - 1 = 3 - 1 = \underline{2} \end{aligned}$$

Løsningen blir dermed:

$$\underline{y = e^{3x} + 2e^{-x}}$$

#2

$$P_4(x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} = 1 - 2x^2 + \tfrac{2}{3}x^4$$

(Taylor-polynomet for $\cos x$ ansees som kjent fra lærebøken. Om dette må utledes skulle det ikke ta så mange minutter – hvis man husker den generelle formelen.)

$$P_4\left(\tfrac{\pi}{12}\right) = 1 - 2\frac{\pi^2}{144} + \frac{2}{3}\frac{\pi^4}{20736}$$

$$= 1 - \frac{9.869604}{72} + \frac{97.40909}{31104}$$

$$= 1 - 0.1370778 + 0.0031317$$

$$= 1 - 0.13394613 = \underline{0.866054}$$

$$f\left(\tfrac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \overset{\text{Lommeregner}}{\approx} \underline{0.866025}$$

Feilen er altså: ≈ 0.000029.

(Vårt svar er for stort fordi neste ledd i Taylors formel (som dominerer resten) er negativt.)

(B)

#3 (a)

Vi har fra boken at kurvetangentens stigningstall er gitt ved:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} \quad \text{der} \quad \frac{dx}{d\theta} \neq 0$$

Vi har her:

$$x = f(\theta)\cos\theta, \quad y = f(\theta)\sin\theta.$$

Dette gir:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta}$$

(b) $r - r\cos\theta = 1$ eller

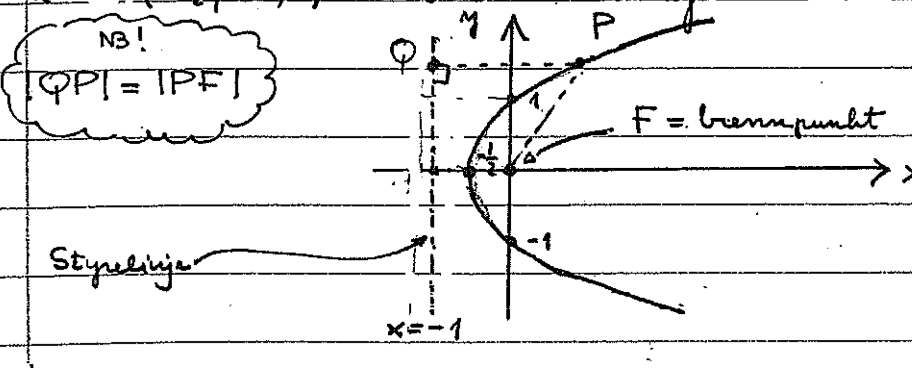
$$r = r\cos\theta + 1$$

$(\triangledown)$ $\sqrt{x^2+y^2} = x+1$. Kvadrering gir:

$$x^2+y^2 = x^2+2x+1 \quad \text{eller}$$

$$y^2 = 2x+1 \quad \therefore \quad x = \tfrac{1}{2}(y^2-1)$$

Dette blir en parabel med topp-punkt i $(-\frac{1}{2}, 0)$, akse langs x-aksen.



(Vi ser også direkte fra $(\triangledown)$ at avstanden fra $P=(x,y)$ til origo er lik avstanden til $x=-1$)

(c)

$\frac{dx}{dy} = y$; $[\frac{\pi}{2}, 1]$ gir kartesiske koordinater $(0,1)$

$\frac{dx}{dy}(1) = 1$. Altså er stigningstallet $k=1$,

altså: blir tangentens ligning:

$$\underline{y} = 1(x+1) = \underline{x+1}$$

(Formelen i (a) gir også $k=1$ ved innsetting!)

(c)

#4 (a) (i) $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right) = \frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x}) = \cosh x$

(ii) $\underline{1+\sinh^2 x} = 1+\frac{1}{4}(e^{2x}-2+e^{-2x}) =$

$\frac{1}{4}(e^{2x}+2+e^{-2x}) = \underline{\cosh^2 x}$

(iii) $\underline{2\cosh^2 x - 1} = 2\cdot\frac{1}{4}(e^{2x}+2+e^{-2x}) - 1 = \frac{1}{2}(e^{2x}+e^{-2x})$

$= \underline{\cosh 2x}$

(iv) $\underline{2\sinh x\cosh x} = 2\,\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^{x}+e^{-x}}{2} =$

$= \frac{1}{2}(e^{2x}-e^{-2x}) = \underline{\sinh 2x}$

(b) $t = \sinh x = \frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$

Ut fra (a) har vi dessuten:

$$\sqrt{1+t^2} = \cosh x = \frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$$

Addisjon av disse to uttrykk gir:

$$t+\sqrt{1+t^2} = e^{x}$$

eller

$$\underline{x = \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)}$$

(c) Vi skal regne ut det ubestemte integralet:

$$\int\sqrt{1+t^2}\,dt$$

Vi substituerer $t=\sinh x$ og får $dt = \cosh x\,dx$ ut fra (a). Dette gir:

$$\int\sqrt{1+t^2}\,dt = \int\cosh x\cdot\cosh x\,dx = \int\cosh^2 x\,dx$$

$$\overset{a(iii)}{=} \int\frac{1}{2}(1+\cosh 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sinh 2x\right]+K$$

$$\overset{a(iv)}{=} \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sinh x\cosh x \overset{(b)}{=} \underline{\frac{1}{2}\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)}$$

$$+\frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} + K$$

(D)

(d) Vi har at buelengden er gitt ved:

$$L = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\int_{0}^{1} \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$y = \frac{1}{2}x^2$ gir:

$$y' = x.$$

Altså:

$$L = 2\int_{0}^{1} \sqrt{1+x^2}\,dx$$

$$\overset{(c)}{=} 2\left[\tfrac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + \tfrac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}\right]\Bigg|_{0}^{1}$$

$$= \underline{\ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}}$$