HJEMMEØVING, MA1102, VÅR 2006

INNLEVERINGSFRIST: Fredag 21. april kl. 14.00.

OPPGAVE A

(a) Anta at $a_n > 0$ for alle n og at

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} a_n^{1/n}.$$

Bevis at dersom $\sigma > 1$ eller $\sigma = \infty$, så divergerer rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(Benytt sammenligningstesten og kjennskapet til geometriske rekkers konvergens og divergens.)

(b) Avgjør om rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2 + \frac{1}{n})^{-n}$$

konvergerer eller divergerer.

OPPGAVE B

Benytt Simpsons metode til å beregne S_4 for integralet

$$I = \int_0^1 e^{-x} \mathrm{d}x.$$

Sammenlign resultatet med den eksakte verdien av I og med de resultatene du oppnår ved å beregne T_4 (trapesmetoden).

OPPGAVE C

Finn den allmenne løsning av differensialligningen

$$y'' - 3y' + 2y = 4e^{2t}.$$

OPPGAVE D

Bestem stigningstallet til to tangenter til kurven

$$x = \sin t, \quad y = \sin 2t$$

i origo.

OPPGAVE E

La (x_1, y_1) være et punkt på sirkelen $x^2 + y^2 = 1$.

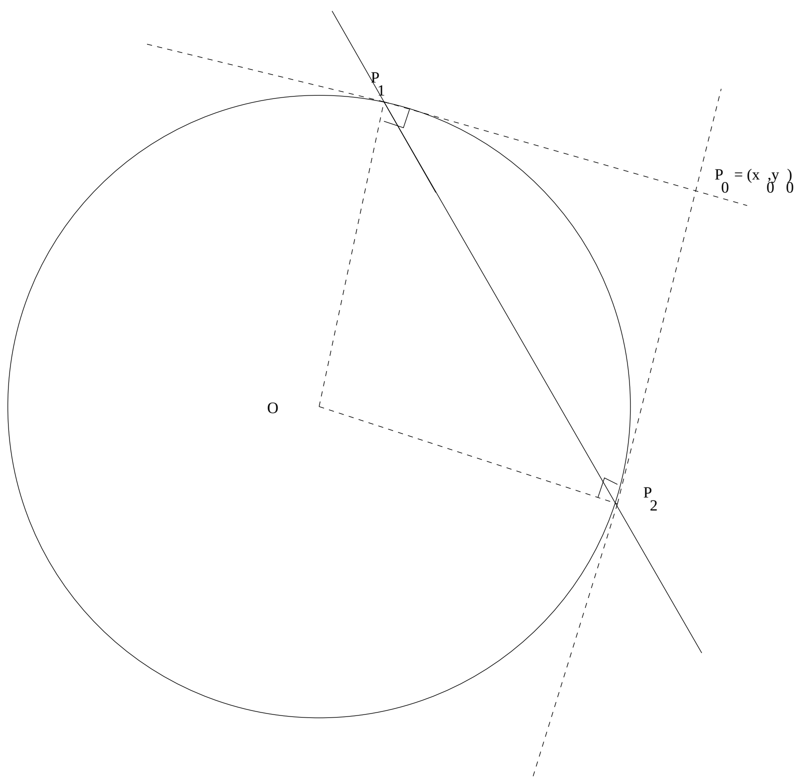
(a) Bevis (på enklest mulig måte) at tangenten til sirkelen i (x_1, y_1) har ligningen

$$x_1 x + y_1 y = 1.$$

(b) Finn ligningen for polaren til punktet (x_0, y_0) m.h.p. sirkelen

$$x^2 + y^2 = 1.$$

(Polaren til punktet $P_0 = (x_0, y_0)$ på figuren er definert som angitt nedenfor. NB! Linjene $\overrightarrow{P_0P_1}$ og $\overrightarrow{P_0P_2}$ er tangenter til sirkelen.)



Figur 1: Polaren er linja fra P_1 til P_2.