Det som ble forelest om Taylors formel 20/2 fra avsnitt 4.8 kan leses i avsnitt 9.8, s. 579-580. Det er greiest å studere Teorem 23, s. 579, med bevis først, og deretter lese avsnitt 4.8.

En overgang fra integralformelen for restleddet

$$E_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt,$$

til Lagranges restleddsformel

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(X)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

ble presentert på forelesningen. Overgangen bygger på følgende lemma.

Lemma 0.1. *Anta at funksjonene $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlige og at g ikke skifter fortegn i dette intervallet. Da finnes det en $c \in [a,b]$ slik at*

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

Bevis. Overlates til leseren! VINK: Benytt mellomverdisetningen. □

Vi starter med

$$E_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \tag{1}$$

som vi kom fram til på forelesningen. Husk at $E_n(x)$ er definert som $f(x) - P_n(x)$, der $P_n(x)$ er Taylorpolynomet av grad n

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Vi antar først at $a \leq t \leq x$ og observerer da at $(x-t)^n \geq 0$ i (1). Ut fra vårt Lemma 0.1 finnes det da en $X \in [a,x]$ slik at

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt = \frac{f^{(n+1)}(X)}{n!} \int_a^x (x-t)^n dt \\
=&\frac{f^{(n+1)}(X)}{(n+1)!} \cdot (-1)(x-t)^{n+1}\Big|_{t=a}^{t=x} \\
=&\frac{f^{(n+1)}(X)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Tilfellet $x \leq t \leq a$ kan behandles helt analogt. (Sjekk dette på egen hånd!)

Fordelen med det ovenstående er at man unngår den nokså kronglete utledningen av Lagranges restleddsformel på s. 287-288 i boken.

NB!! Med Lagranges restleddsformel har vi

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(X)}{(n+1)!}(x-a)^{n-1},$$

der X ligger mellom x og a, forutsatt at f er $n+1$ ganger deriverbar med kontinuerlig $(n+1)$-te derivert.