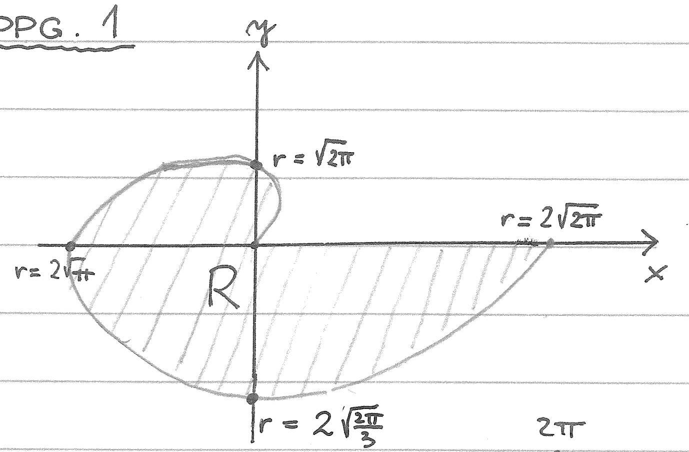
LØSNING PÅ MIDTSEMESTEREKSAMEN i MA1102

6/3 - 2006

OPPG. 1



Arealet blir: $A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 4\theta \, d\theta = \theta^2 \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}$

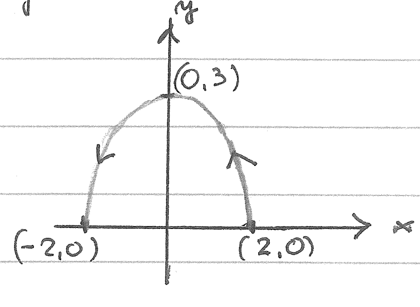
$= \underline{\underline{4\pi^2}}$

OPPG. 2

(a) Vi har: $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$

Altså er kurven inneholdt i ellipsen med sentrum i origo og halvakser 2 og 3.

Siden $t \in [0, \pi]$ blir (*) øvre halvdel av ellipsen med den angitte orientering.



(b) Siden $y = 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$ er øvre halvdel av ellipsen, blir det søkte areal:

$$A = 4\int_0^2 3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx = 12\int_0^2 \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx$$

Vi substituerer: $x = 2\sin t$, og får $dx = 2\cos t \, dt$, som gir:

$$\int \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx = 2\int \cos t \cdot \cos t \, dt = \int (1+\cos 2t)\,dt$$

NB! $\frac{1}{2}\sin 2t = \sin t \cdot \cos t$

$$= t + \frac{1}{2}\sin 2t + K = \sin^{-1}\frac{x}{2} + x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + K.$$

$$A = 12\int_0^2 \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx = 12\left[\sin^{-1}\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right]_0^2$$

$$= 12\left[\left(\frac{\pi}{2}+0\right)-(0+0)\right] = \underline{6\pi}$$

OPPG. 3

Den homogene ligning $y'' + 4y = 0$ har algebraisk ligning $r^2 + 4 = 0$, d.v.s. $r = \pm 2i$. Altså er den allmenne løsning av den homogene:

$$y_H = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$$

Vi vet at y_P må ha formen $y_P = Ae^t$, og bestemmer A ved innsetting:

$y_P'' = Ae^t$. Dette gir:

$$Ae^t + 4Ae^t = 2e^t$$

$$5Ae^t = 2e^t \quad \therefore \quad A = \frac{2}{5}$$

Altså er den allmenne løsningen:

$$\underline{y} = y_H + y_P = \underline{C_1\cos 2t + C_2 \sin 2t + \frac{2}{5}e^t}$$

OPPG. 4

(a) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(e^t - e^{-t})\right) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) = \underline{\cosh t}$$

$$(1+\sinh^2 t)^{1/2} = \left(1 + \frac{1}{4}(e^{2t} - 2 + e^{-2t})\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{1}{4}(e^{2t} + 2 + e^{-2t})\right)^{1/2} = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) = \underline{\cosh t}$$

(b)

$$\left.\begin{aligned} x &= \sinh t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \\ \sqrt{1+x^2} &\overset{(a)}{=} \cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \end{aligned}\right\} \text{ addisjon gir:}$$

$$x + \sqrt{1+x^2} = e^t \qquad \text{eller:}$$

$$\underline{t = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)}$$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ Substituerer: $x = \sinh t$

får: $dx = \cosh t$, $\sqrt{1+x^2} = \cosh t$

Dette gir:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\cancel{\cosh t}}{\cancel{\cosh t}}\, dt = \int dt = t + C$$

$$\stackrel{(b)}{=} \underline{\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C}$$

<u>OPPG. 5:</u>

Betingelsen gir:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Kvadrering gir:

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = 4(x^2 + 2xc + c^2 + y^2)$$

eller:

$$3x^2 + 10xc + 3c^2 + 3y^2 = 0$$

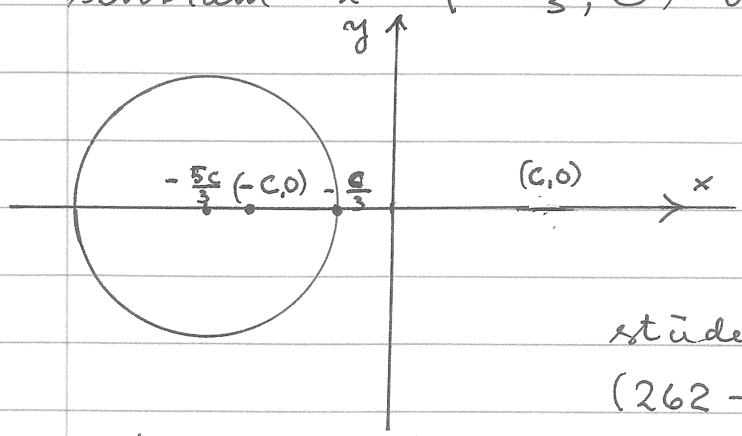
$$x^2 + \frac{10c}{3}x + c^2 + y^2 = 0$$

eller

$$x^2 + \frac{10c}{3}x + \left(\frac{5c}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{25c^2}{9} - c^2$$

$$\left(x + \frac{5c}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16c^2}{9}$$

Kurven blir m.a.o. en sirkel med sentrum i $\left(-\frac{5c}{3}, 0\right)$ og radius $\frac{4c}{3}$



Denne type sirkler ble opprinnelig studert av Apollonius (262–190 f.K) og kalles Apollonius' sirkler.