Løsningsforslag
Eksamen i MA1102/MA6102 Grunnkurs i analyse II
— 17/12 2008

Oppgave 1

$$y' = xy + 1, \qquad y(0) = 0$$

a)

n	x_n	y_n	$y' = x_n y_n + 1$	Δx	$\Delta y = y'\Delta x$	y_{n+1}
0	0	0	1	1/2	1/2	1/2
1	1/2	1/2	5/4	1/2	5/8	9/8
2	1	9/8				

så Eulers metode med steglengde 1/2 gir oss estimatet $\underline{y(1) \approx 9/8}$

b) Her er noen løsningsalternativer

alternativ 1: Hvis funksjonen kan skrives som en rekke, er denne rekken den samme som Taylorrekken, i dette tilfellet med sentrum i $x = 0$ (Maclaurinrekken). Dermed har vi rett ut fra ligningen og initialverdien at

$$\begin{aligned} a_0 &= y(0) = 0 \\ a_1 &= y'(0) = 0 \cdot 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

For de to neste må vi jobbe litt mer (' er derivasjon med hensyn på x)

$$\begin{aligned} y'' &= (y')' = (xy+1)' = y + xy' \\ y^{(3)} &= (y'')' = (y + xy')' = y' + y' + xy'' \end{aligned}$$

Dermed får vi

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{y''(0)}{2} = \frac{0 + 0 \cdot 1}{2} = 0 \\ a_3 &= \frac{y^{(3)}(0)}{3!} = \frac{1 + 1 + 0 \cdot 0}{3!} = 1/3 \end{aligned}$$

alternativ 2: Jeg kan sette rekken inn i differensialligningen. Først deriverer jeg rekken:

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

Hvis jeg setter de to rekkene inn i ligningen får jeg

$$\begin{aligned} y' &= xy + 1 \\ \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n &= x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 1 \\ a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n \end{aligned}$$

Fra dette får jeg

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ (n+1)a_{n+1} &= a_{n-1} \text{ for } n \geq 1 \end{aligned}$$

Det siste kan også skrives

$$a_n = \frac{a_{n-2}}{n} \text{ for } n \geq 2.$$

Initialverdien gir oss $y(0) = a_0 = 0$ så dermed har vi

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \\ a_2 &= \frac{a_0}{2} = 0 \\ a_3 &= \frac{a_1}{3} = 1/3 \end{aligned}$$

Oppgave 2

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2/2}\,dx &\approx \frac{e^{-0^2/2} + e^{-0{,}5^2/2}}{2}\frac{1}{2} + \frac{e^{-0{,}5^2/2} + e^{-1^2/2}}{2}\frac{1}{2} \\ &= \underline{\frac{1 + 2e^{-1/8} + e^{-1/2}}{4} \approx 0{,}843} \end{aligned}$$

Oppgave 3 Dette er en potensrekke, så vi sjekker først for absolutt konvergens, dvs konvergens av rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(2n+1)(n!)}|x|^{2n+1}$$

Vi kan for eksempel bruke forholdstesten:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)+1}}{2^{n+1}(2(n+1)+1)((n+1)!)}\right|}{\left|\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^n(2n+1)(n!)}\right|} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2(2n+3)(n+1)}|x|^2 \\
&= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{2(2+\frac{3}{n})(n+1)}\right)|x|^2 = 0
\end{aligned}$$

Altså konvergerer rekken absolutt for alle tall x.

("Latskapsløsning": Hvis vi synes forholdstesten ble litt for grisete kan vi for eksempel sammenligne rekken vi nettopp testet med $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{n!}$. Forholdstesten på denne er litt mindre arbeid, og viser at også denne konvergerer for alle x.)

Oppgave 4 Her er to løsningsalternativer for denne også

alternativ 1: Vi vet at dette må være en parabel, den har akse som står normalt på styrelinja $y = 2$, altså må aksen være parallell med y-aksen. I tillegg går aksen gjennom brennpunktet, så aksen må være y-aksen. Dermed vet vi at ligningen er på formen $y = ax^2+b$. Punktet på kurven som ligger på aksen må ligge midt mellom origo og styrelinja $y = 2$, så må ha koordinater $(0, 1)$. Dermed vet vi at $b = 1$. Når kurven skjærer x-aksen er avstanden fra styrelinja 2, dermed må avstanden fra origo også være 2, så kurven skjærer x-aksen i 2 og -2. Dermed har vi $0 = a2^2 + 1$, så $a = -1/4$. Dermed er ligningen for kurven

$$\underline{y = -\frac{1}{4}x^2 + 1}$$

alternativ 2: For et punkt (x, y) er avstanden til linjen $y = 2$ lik $|y - 2|$ og avstanden til origo er $\sqrt{x^2 + y^2}$. Disse to avstandene må være like, så hvis vi kvadrerer hver størrelse får vi

$$\begin{aligned}
|y-2| &= \sqrt{x^2+y^2} \\
(y-2)^2 &= x^2+y^2 \\
y^2-4y+4 &= x^2+y^2 \\
y &= -\frac{1}{4}x^2+1
\end{aligned}$$

Oppgave 5 Til hver kurve vil vi først sjekke at punktet $(1, 1)$ er på kurven og deretter finne stigningstallet til tangenten i dette punktet. Punktet og stigningstallet vil da gi en fullstendig beskrivelse av tangenten.

(Det er altså greit å gi svaret på formen "Tangenten er linjen gjennom $(1,1)$ med stigningstall m.". Andre muligheter er å gi en ligning, en funksjonsbeskrivelse eller en parameterfremstilling.)

a) Hvis vi tar $t = 1$ får vi $x = 1^2 = 1$ og $y = 2 \cdot 1 - 1^3 = 1$, så $(1,1)$ er på kurven

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2 - 3t^2}{2t}$$

så i $(1,1)$ (m.a.o. der $t = 1$) har vi stigningstall

$$m = \frac{2 - 3 \cdot 1^2}{2 \cdot 1} = -1/2$$

Så tangenten er linjen gjennom $(1,1)$ med stigningstall $-1/2$.

b) Punktet $(1,1)$ har polar koordinater $r = \sqrt{2}$, $\theta = \pi/4$. Vi har $\sin \pi/4 = \cos \pi/4 = \sqrt{2}/2$, så $\sin \pi/4 + \sin \pi/4 = \sqrt{2}$. Altså er $(1,1)$ på kurven.

Hvis ψ er vinkelen mellom linjen fra origo til punktet på kurven og tangenten, har vi

$$\tan \psi = \frac{r(\theta)}{dr/d\theta}$$

og $\psi = \pi/2$ når $dr/d\theta = 0$. Vi har

$$\begin{aligned} r(\theta) &= \sin \theta + \cos \theta \\ dr/d\theta &= \cos \theta - \sin \theta \end{aligned}$$

så for $\theta = \pi/4$ får vi

$$dr/d\theta = \sqrt{2}/2 - \sqrt{2}/2 = 0,$$

så tangenten står normalt på linjestykket fra origo til $(1,1)$ så tangenten er linjen gjennom $(1,1)$ med stigningstall $m = -1$.

Hvis du ikke kommer på denne fremgangsmåten er det for denne oppgaven andre mulige løsninger, for eksempel kan du multiplisere hver side av ligningen med r og få $r^2 = r \sin \theta + r \cos \theta$ som er ekvivalent med $x^2 + y^2 = y + x$ og vi kan finne stigningstallet til tangenten med implisitt derivasjon.

c) $f(1) = 1^1 = 1$, så $(1,1)$ ligger på kurven.

For å derivere f skriver vi $f(x) = x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}$ og får

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x\ln x}(\ln x + x\frac{1}{x}) = x^x(1+\ln x) \\ f'(1) &= 1^1(1+\ln 1) = 1 \end{aligned}$$

Altså er tangenten linjen gjennom $(1,1)$ med stigningstall 1.

Oppgave 6 Hvis vi bruker hintet, og skriver $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx$ får vi

$$\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \sum_{n=1}^\infty \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx = \sum_{n=1}^\infty a_n$$

så det uekte integralet vil konvergere hvis og bare hvis rekken vil konvergere. På intervallene $(n\pi, (n+1)\pi)$ (n et positivt heltall) er $\sin x$ positiv (på hele intervallet) og negativ (på hele intervallet) på annethvert intervall. Dermed er rekken en alternerende rekke.

Vi har også

$$\begin{aligned} |a_{n+1}| &= \left| \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx \right| = \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx < \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^\pi \sin x\, dx \\ &< \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx \right| = |a_n|, \end{aligned}$$

så tallverdien til leddene er avtagende. I tillegg viser den første ulikheten at leddene går mot null. Dermed følger det av alternerende rekketesten at rekken konvergerer, og fra kommentaren over, at det uekte integralet konvergerer.