EKSAMENSOPPGAVER

I

MA1102

GRUNNKURS I ANALYSE II

MED

LØSNINGSFORSLAG

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Førsteamanuensis Per Hag, tlf. 91743

MA1102 GRUNNKURS I ANALYSE II

Bokmål
Torsdag 15. desember 2005
Tid 9-13
Hjelpemidler: Godkjent kalkulator (HP30S)
Sensurdato: Mandag 16. januar 2006

Oppgave 1

Hvilken type kurver gitt ved ligningen

$$x^2 + 2x - y = 3 \ \ ?$$

Tegn en skisse.

(Hvis det er en ellipse skal brennpunktene identifiseres. Hvis det er en parabel skal brennpunkt og styrelinje angies. Hvis det er en hyperbel skal asymptotene bestemmes.)

Oppgave 2

Finn parameterframstillingen til tangenten til kurven gitt ved:

$$x = t^3 - 2t, \quad y = t + t^3$$

for $t = 1$.

Oppgave 3

a) Finn den generelle løsningen til differensialligningen:

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

b) Bestem den spesielle løsning av differensialligningen i (a) som tilfredsstiller initialbetingelene:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$$

Oppgave 4

a) Skriv opp Taylor-polynomet av grad 2 for funksjonen $f(x) = x^{1/3}$ nær 8.

b) Benytt formelen i (a) til å bestemme $9^{1/3}$ med god tilnærmelse.

Oppgave 5

Et radioaktivt stoff spaltes etter loven

$$\frac{dp(t)}{dt} = kp(t)$$

der $p(t)$ betegner prosenten som er tilbake etter t år og der $k < 0$ er en konstant som er avhengig av kvilket radioaktivt stoff det dreier seg om. Således er $p(0) = 100$.

Vi får opplyst at $p(1) = 99.57\%$. Bestem halveringstiden for stoffet, d.v.s. finn $t_{\frac{1}{2}}$ når $p(t_{\frac{1}{2}}) = 50\%$.

Oppgave 6

a) skriv opp integraltesten for positive rekker. (Bevis kreves ikke).

b) Bevis at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergerer for $p > 1$ og divergerer for $p \leq 1$.

c) Avgjør om rekken

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

konvergerer eller divergerer.

Dette arket skal besvares og leveres inn.

STUDENTNUMMER:

Oppgave 6

Kryss av i ruten til høyre **R** eller **G** etter som du mener at nedenstående utsagn er riktig eller galt. (Begrunnelse kreves ikke i denne oppgaven!)

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer bare hvis $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. ☐

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer dersom $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. ☐

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ konvergerer absolutt. ☐

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergerer med sum lik 1. ☐

(v) Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer, så konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$. ☐

(vi) Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ konvergerer for alle $x \in [-1, 1]$ og divergerer for alle andre x. ☐

(vii) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$. ☐

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Førsteamanuensis Per Hag, tlf. 91743

MA1102 GRUNNKURS I ANALYSE II

Bokmål
Tirsdag 24. mai 2005
Tid 9-13
Hjelpemidler: Godkjent kalkulator (HP30S)
Sensurdato: Tirsdag 13. juni 2005

Oppgave 1

a) Løs differensialligningen:

$$y'' + 2y' + 3y = 0.$$

b) Løs initialverdiproblemet:

$$\frac{dy}{dx} + y = x, \quad y(0) = 2.$$

Oppgave 2

Regn ut integralene

a)

$$\int \frac{du}{1-u^2}$$

b)

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}} dx.$$

Oppgave 3

a) Hvilken type kurve er

$$y^2 - x^2 = 1$$

Tegn en skisse og angi eventuelle asymptoter.

b) Bestem ligningen for tangenten til kurven i (a) i kurvepunktet $(\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$. Vis deretter at denne tangenten ikke har noe skjæringspunkt med kurven utenom berøringspunktet.

Oppgave 4

Avgjør om integralet

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{x+1} dx$$

konvergerer eller divergerer.

Oppgave 5

a) Bevis at den harmoniske rekke $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerer.

b) Bevis at når rekken $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer, så må $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

c) Kan implikasjonen i (b) snues? Svaret skal begrunnes.

d) Avgjør om rekken $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+2^n}{2^{n+1}}$ konvergerer eller divergerer ut fra (b) ovenfor.

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under Midtsemestereksamen:
Førsteamanuensis Per Hag (9 17 43)

MIDTSEMESTEREKSAMEN I MA1102 GRUNNKURS I ANALYSE II

Mandag 6. mars 2006
Tid: 12:15 – 14:00
Hjelpemidler: Godkjent kalkulator (HP30S)
Bokmål

Oppgave 1

Skisser området R i planet som er begrenset av kurven gitt i polarkoordinater ved:

$$r = 2\sqrt{\theta} \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

og av intervallet $[0, 2\sqrt{2\pi}]$ på x-aksen. Beregn deretter arealet av dette området.

Oppgave 2

a) En kurve er gitt ved parameterframstillingen:

$(*)$ $$x = 2\cos t, \quad y = 3\sin t; \quad t \in [0, \pi].$$

Eliminer parameteren t for å bestemme en kurve i kartesiske (rettvinklede) koordinater som inneholder $(*)$. Lag en skisse av kurven $(*)$ og angi orienteringen som svarer til voksende t.

b) Finn arealet begrenset av ellipsen:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Oppgave 3

Finn den allmenne løsningen av differensialligningen:

$$y'' + 4y = 2e^t.$$

Oppgave 4

a) Vi definerer:

$$\begin{aligned}\sinh t &= \tfrac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \\ \cosh t &= \tfrac{1}{2}(e^t + e^{-t})\end{aligned}$$

Bevis at

$$\frac{d}{dt}(\sinh t) = \cosh t$$

og at

$$\sqrt{1 + \sinh^2 t} = \cosh t.$$

b) Bevis at dersom

$$x = \sinh t,$$

så er:

$$t = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

c) Regn ut det ubestemte integralet:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Oppgave 5

Finn ligningen for kurven som inneholder alle punkter i planet som har dobbel så stor avstand til punktet $(c, 0)$ som til punktet $(-c, 0)$. (Vi antar at $c > 0$). Hvilke type kurve er dette? Lag en skisse av kurven.

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Førsteamanuensis Per Hag, tlf. 91743

MA1102 GRUNNKURS I ANALYSE II

Bokmål
Onsdag 19. mai 2004
Tid 9-13
Hjelpemidler: Godkjent kalkulator (HP30S)
Sensurdato: Onsdag 9. juni

I oppgave 1 - 5 skal svarene begrunnes. I oppgave 6 skal du bare skrive R eller G i rutene til høyre. Arket med oppgave 6 skal innleveres.

Oppgave 1

En kurve har parameterframstillingen:

$$x = 3\sin t\,, \quad y = 4\cos t \qquad -\pi \le t \le \pi.$$

Lag en skisse av kurven og eliminer parameteren t for å få en ligning i kartesiske koordinater. Hva kalles en slik kurve?

Oppgave 2

Løs initialverdiproblemet:

$$y' - \frac{2y}{x} = x^2 \quad ; \quad y(1) = 3$$

Oppgave 3

En varm gjenstand plasseres i et kaldere rom. I følge Newtons avkjølingslov vil da gjenstandens temperatur $y = y(t)$ endre seg slik at $y'(t)$ er proporsjonal med forskjellen mellom romtemperaturen og gjenstandens temperatur ved tidspunktet t.

a) Sett opp en differensialligning for $y = y(t)$ når det opplyses at romtemperaturen er konstant lik $19°C$.

b) Vi får opplyst at gjenstandens temperatur ved tiden $t = 0$ var $79°C$ og at den synker til $46°C$ etter 5 minutter. Hva er gjenstandens temperatur etter 10 minutter?

Oppgave 4

Løs initialverdiproblemet:

$$y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Oppgave 5

a) Avgjør om det uegentlige integralet:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln x}.$$

divergerer eller konvergerer.

b) Avgjør om rekken:

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \ln n}.$$

divergerer eller konvergerer.

Dette arket skal besvares og leveres inn.

STUDENTNUMMER:

Oppgave 6

Kryss av i ruten til høyre **R** eller **G** etter som du mener at nedenstående utsagn er riktig eller galt. (Begrunnelse kreves ikke i denne oppgaven!)

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer bare hvis $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. ☐

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer dersom $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. ☐

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ konvergerer absolutt. ☐

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergerer med sum lik 1. ☐

(v) Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer, så konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$. ☐

(vi) Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ konvergerer for alle $x \in [-1, 1]$ og divergerer for alle andre x. ☐

(vii) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$. ☐

LØSNING:

MA 1102 - Grunnkurs i analyse II

Torsdag 15/12 - 2005

OPPGAVE 1:

Vi skal klassifisere kurven:

$$x^2 + 2x - y = 3$$

Ekvivalent:

$$x^2 + 2x + 1 - y = 4$$

eller:

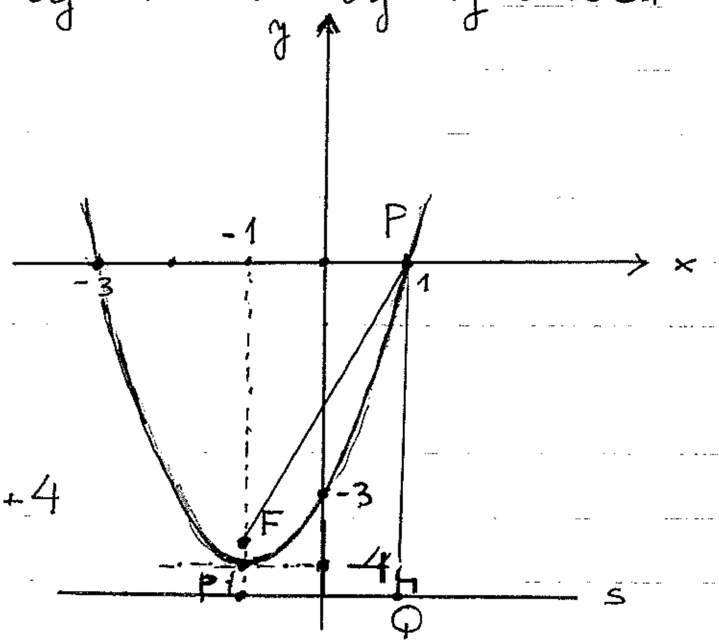
$$(x+1)^2 = y + 4$$

- Vi ser at dette blir en parabel med "topp-punkt" (hjørne) i $(-1, -4)$. Den skjærer x-aksen i $x = -3$ og $x = 1$ og y-aksen i $y = -3$. I følge læreboken, s. 479, vil

$$X^2 = 4aY$$

for en parabel gjennom origo i (X, Y)-systemet ha styrelinje (directrix)

$$Y = -a$$



- Settes $X = x + 1$, $Y = y + 4$ får vi $4a = 1$ m.a.o. $a = 1/4$. Dette gir styrelinje: $y + 4 = Y = -\frac{1}{4}$, d.v.s. $y = -4 - \frac{1}{4} = -\frac{17}{4}$. F har koordinater: $(0, \frac{1}{4})$ i XY-systemet, d.v.s. $X = x + 1 = 0$, $Y = y + 4 = \frac{1}{4}$ eller: $F = (-1, -\frac{15}{4})$, brennpunkt.

ALTERNATIVT:

$F = (-1, -4 + p)$, s: $y = -4 - p$ Ut fra definisjonen må vi da ha: $|FP| = |PQ|$ eller:

$$\sqrt{(1+1)^2 + (-4+p)^2} = |-4 - p| \therefore \quad p = \frac{1}{4}.$$

OPPGAVE 2:

$$x'(t) = 3t^2 - 2 \quad , \quad x(1) = 1 - 2 = -1 \quad , \quad x'(1) = 1$$

$$y'(t) = 1 + 3t^2 \quad , \quad y(1) = 2 \quad , \quad y'(1) = 4$$

Altså har tangenten i det aktuelle punktet parameterligningen:

$$\left.\begin{aligned} x &= -1 + u \\ y &= 2 + 4u \end{aligned}\right\} \quad u \in \mathbb{R}$$

OPPGAVE 3:

(a) Den tilsvarende algebraiske ligning er:

$$r^2 + 2r + 5 = 0$$

eller

$$r^2 + 2r + 1 = -4$$

med rötter:

$$r = -1 \pm 2i$$

I fölge teorien blir dermed den allmenne lösning:

$$y = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$$

(b) Vi har initialbetingelsene:

$$y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 2.$$

$$0 = y(0) = e^0(A\cos 0 + B\sin 0) = A \; ;$$

d.v.s. lösningen har formen:

$$y = Be^{-x}\sin 2x$$

$$y' = B(-e^{-x}\sin 2x + 2e^{-x}\cos 2x)$$

$$y'(0) = B(0 + 2\cdot 1) = 2 \quad , \text{ d.v.s. } \quad B = 1$$

Den sökte spesielle lösning blir derfor:

$$y = 2e^{-x}\sin 2x$$

OPPGAVE 4:

(a) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{2}}$

$f(8) = \sqrt[3]{8} = 2$, $f'(8) = \frac{1}{3}\frac{1}{2^2} = \frac{1}{12}$, $f''(8) = -\frac{2}{9}\frac{1}{2^5} = -\frac{1}{144}$

Taylor-polynomet av grad 2 nær $x=8$ blir dermed:

$$P_2(x) = 2 + \frac{1}{1!}\frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{2!}\frac{1}{144}(x-8)^2$$

$$= \underline{2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{288}(x-8)^2}$$

(b)

$$P_2(9) = 2 + \frac{1}{12}\cdot 1 - \frac{1}{288}(1)^2 = 2 + 0.08333 - 0.003472$$

$$= \underline{2.079861}$$

Direkte på lommeregneren : $\underline{2.080083}$

OPPGAVE 5:

$$\frac{dp}{dt} = kp \quad , \text{ der } k<0 \text{ er konstant,}$$

er en separabel differensialligning:

$$\int \frac{dp}{p} = k\int dt$$

som gir:

$$\ln|p(t)| = kt + \ln K$$

eller $\quad p(t) = Ke^{kt}$

$p(0) = 100$, gir $\quad Ke^0 = 100, \therefore K=100$

Den allmenne løsning blir derfor:

$$p(t) = 100e^{kt}$$

Vi får dessuten opplyst at $p(1)=99.75$.

Dette gir: $\quad p(1) = 100e^k = 99.75$

eller $\quad e^k = 0.9975$.

Vi kaller halveringstiden for stoffet $t_{1/2}$. Vi har da:

$$p(t_{1/2}) = 50 = 100e^{kt_{1/2}}$$

Dette gir: $\quad e^{kt_{1/2}} = \frac{1}{2}$ eller

$(0.9975)^{t_{1/2}} = \frac{1}{2}$ eller: $t_{1/2} = \frac{-\ln 2}{\ln 0.9975} \approx$

$$\frac{-0.693147}{-0.0043093} \approx \underline{161 \text{ år}}$$

OPPGAVE 6:

(a) INTEGRALTESTEN FOR POSITIVE REKKER: (s. 535, Adams)
Anta at $f: [N,\infty[\to \mathbb{R}$ er positiv, kontinuerlig og ikke-voksende, og la $a_n = f(n)$ for $n \in [N,\infty[$, der N er et naturlig tall.
Da vil rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergere hvis og bare hvis integralet $\int_N^{\infty} f(t)\,dt$ konvergerer.

(b) Vi studerer integralet:

$$\int_1^x \frac{dt}{t^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p}(x^{-p+1} - 1) & \text{for } p \neq 1 \\ \ln x & \text{for } p = 1 \end{cases}$$

- Siden $\lim_{x\to\infty} x^{1-p} = \infty$ når $p<1$, har vi at integralet:

$$\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^p} \text{ divergerer i dette tilfellet.}$$

Altså divergerer rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ for $p<1$ ut fra (a)

- $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$, gir at integralet $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t}$ divergerer for $p=1$. Altså divergerer den harmoniske rekke $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

- For $p>1$ vil $\lim_{x\to\infty} x^{1-p} = 0$. Altså konvergerer integralet $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ og rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ når $p>1$.

(c)

$$\int_2^T \frac{dt}{t \ln t} = \ln(\ln t)\Big|_2^T = \ln(\ln T) - \ln(\ln 2)$$

$\to \infty$ når $T\to\infty$. Altså divergerer rekken

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

ut fra integralkriteriet.

MA1102, EKSAMEN 24/5-05

LØSNINGER:

OPPGAVE 1:

(a) Vi skal bestemme den allmenne lösning for differensial-ligningen:

$$y'' + 2y' + 3y = 0$$

Den tilhörende algebraisk ligning:

$$r^2 + 2r + 3 = 0$$

har rötter: $r = \frac{1}{2}[-2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 1 \cdot 3}] = \begin{cases} -1 + i\sqrt{2} \\ -1 - i\sqrt{2} \end{cases}$

Den allmenne lösning blir derfor:

$$\underline{y = e^{-x}(A\cos(\sqrt{2}x) + B\sin(\sqrt{2}x)}$$

(b)

Vi skal löse initialverdi-problemet:

$$y' + y = x \quad ; \quad y(0) = 2$$

Vi må finne integrerende faktor $e^{\mu(x)}$ der $\mu(x) = \int 1\,dx = x$ (der vi velger å sette integrasjonskonstanten lik 0.) Altså:

$$e^x y' + e^x y = e^x \cdot x$$

eller: $\frac{d}{dx}(e^x y) = e^x \cdot x$

som gir:

$$e^x y = \int x e^x dx = x e^x - \int 1 \cdot e^x dx$$

$= xe^x - e^x + K$ som gir allmen lösning: $y = x - 1 + Ke^{-x}$. Videre har vi: $2 = y(0) = 0 - 1 + Ke^0 = -1 + K$

Dette gir $K = 3$. Den spesielle lösning som er lösning for vår initialproblem blir dermed:

$$\underline{y = x - 1 + 3e^{-x}}$$

(MA1102, Eks. 24/5-05, lösn. forb.)

OPPGAVE 2:

(a) Vi skal regne ut det ubestemte integralet: $\int \frac{du}{1-u^2}$. Siden

$1-u^2 = (1-u)(1+u)$ har vi en delbrøk-oppspaltning av følgende type:

$$\frac{1}{1-u^2} \equiv \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u} \equiv \frac{A + Au + B - Bu}{1-u^2}$$

$$\equiv \frac{(A+B)+(A-B)u}{1-u^2}$$ Dette gir da lignings-systemet:

$$A + B = 1$$
$$A - B = 0$$ som gir: $A = B = \frac{1}{2}$

Integrasjonen:

$$\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{1-u} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|1-u| + \frac{1}{2}\ln|1+u| + C$$

$$= \underline{\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C}$$

(b) Vi skal regne ut det bestemte integralet:

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

Vi substituerer her: $x = 2\sin t$ og får: $dx = 2\cos t\,dt$, $\sqrt{4-x^2} = 2\sqrt{1-\sin^2 t}$ $= 2\cos t$ (Her ville vi generelt ha $\sqrt{1-\sin^2 t} = |\cos t|$, men siden $0 \le x \le \sqrt{2}$, må vi ha $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$ og da blir $\cos t > 0$. Vi får da videre:

(MA1102, Eks. 24/5-05, lösn. forts.)

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \frac{(2\sin t + 1)\,\cancel{2\cos t}}{\cancel{2\cos t}}\,dt$$

$$= \int (2\sin t + 1)\,dt = -2\cos t + t + K$$

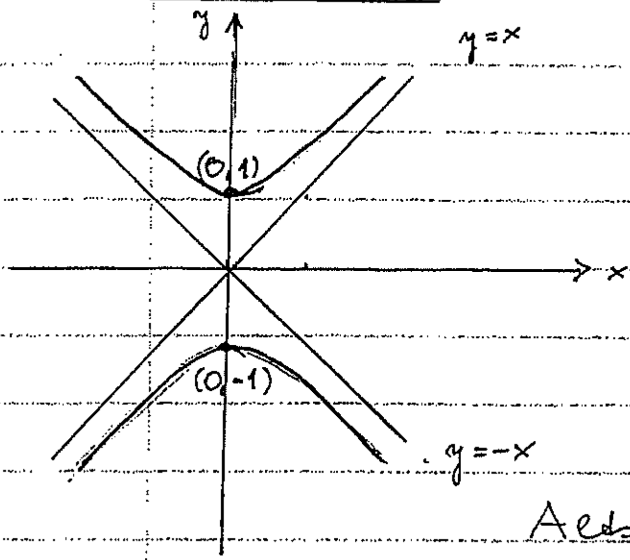
$$= -2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + \sin^{-1}\frac{x}{2} + K$$

$$= -\sqrt{4-x^2} + \sin^{-1}\frac{x}{2} + K$$

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = -\sqrt{4-x^2}\,\Big|_0^{\sqrt{2}} + \sin^{-1}\frac{x}{2}\,\Big|_0^{\sqrt{2}}$$

$$= -\sqrt{2} + 2 + \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} - 0 = \underline{\underline{\frac{\pi}{4} + 2 - \sqrt{2}}}$$

OPPGAVE 3:



(a) Kurven er en hyperbel med asymptoter: $y = x$ og $y = -x$. y-aksen er i akse siden kurven åpenbart ikke skjærer x-aksen.

(b) $\left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25-9}{16} = 1$

Altså er $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$ et kurvepunkt.

Den øverste grenen av hyperbelen har ligningen: $y = \sqrt{1+x^2}$ med derivert:

$$y' = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{y}$$

Stigningstallet for tangenten i $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$ blir:

$$y'\left(\tfrac{3}{4}\right) = (3/4)/(5/4) = \frac{3}{5}$$

Ligningen for tangenten blir dermed:

$$y - \frac{5}{4} = \frac{3}{5}\left(x - \frac{3}{4}\right)$$

eller $\quad \underline{y} = \frac{3}{5}x - \frac{9}{20} + \frac{25}{20} = \underline{\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}}$

Skjæring mellom kurven $y^2 - x^2 = 1$ og tangenten bestemmen ved eliminasjon av y mellom de to

(MA1102, Eks. 24/5-05, lösn. forts.)

ligningene:

$$\left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}\right)^2 - x^2 = 1$$

som gir:

$$\frac{9}{25}x^2 + \frac{24}{25}x + \frac{16}{25} - x^2 = 1$$

eller:

$$\frac{16}{25}x^2 - \frac{24}{25}x + \frac{9}{25} = 0$$

eller:

$$\left(\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}\right)^2 = 0$$

som har dobbelroten: $x = \frac{3}{4}$. Altså finnes det ingen annen lösning enn den som svarer til berøringspunktet $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$.

OPPGAVE 4:

Vi skal avgjöre om integralet

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{x+1}\,dx$$

konvergerer eller divergerer. Vi observerer at $\lim_{x \to -1+} e^x/(x+1) = \infty$ og at integranden er kontinuerlig i $]-1,1]$. Vi må derfor avgjöre om

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-1+\varepsilon}^{1} \frac{e^x}{x+1}\,dx$$ eksisterer eller ikke.

Vi har: $e^x/(x+1) > e^{-1}(x+1)$ i det halvåpne intervallet $]-1,1]$. Vi har videre:

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-1+\varepsilon}^{1} \frac{e^x}{x+1}\,dx > \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-1+\varepsilon}^{1} \frac{e^{-1}}{x+1}\,dx$$

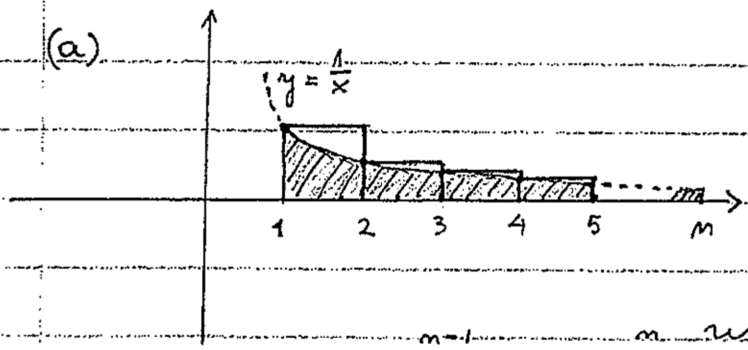
$$= e^{-1} \lim_{\varepsilon \to 0+} \left[\ln(2) - \ln(1-1+\varepsilon)\right] = \infty$$

(MA1102, Eks. 24/5-05, løsn. forb.)

Altså divergerer integralet $\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{x+1}\,dx$

OPPGAVE 5:

(a)



Vi ser av figuren at summen av rektanglenes areal er større enn arealet under kurven skravert.

Dette gir: $\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j}\cdot 1 > \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n$. Siden $\lim_{n\to\infty} \ln n = \infty$, må $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$ divergere. (Integraltesten!)

(b) At rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer betyr at $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$, der $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Det innsees da lett at også $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$. Vi har dessuten:

$$a_n = s_n - s_{n-1}.$$

Dette gir: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) \overset{\text{regneregel for følger}}{=} s - s = 0$

(c) Implikasjonen kan ikke snues. Moteksempel: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerer og $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

(d) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5+2^n}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1+5/2^n}{1}\right)$

$= \frac{1}{2} \neq 0$. Ut fra (b) kan vi dermed slutte at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+2^n}{2^{n+1}}$ divergerer.

EKSAMEN, MA1102

19/5-2004:

OPPG. 1:

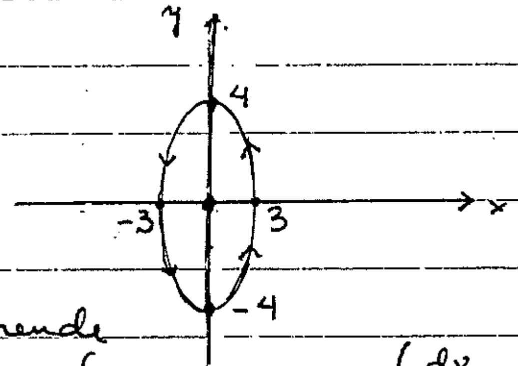
$$x = 3\sin t,\quad y = 4\cos t\ ;\ -\pi < t \le \pi$$

gir: $\frac{x}{3} = \sin t$, $\frac{y}{4} = \cos t$ og med

$\sin^2 t + \cos^2 t \equiv 1$ gir dette den kartesiske ligningen:

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$$

Dette er ligningen for en ellipse med sentrum i $(0,0)$ og halvakser $a = 3$ og $b = 4$.



OPPG. 2:

$$y' - \frac{2y}{x} = x^2;\quad y(1) = 3$$

Vi bestemmer först integrerende faktor: $e^{\mu(x)}$, der $\mu(x) = \int p(x)\,dx = -2\int \frac{dx}{x}$ $= -2\ln x$ (Vi velger integrasjonskonstanten 0)

$$e^{\mu(x)} = e^{-2\ln x} = 1/x^2$$

Begge sider av ligningen multipliseres med $1/x^2$:

$$\frac{1}{x^2}y' - \frac{2y}{x^3} = 1$$ (Ifölge teorien skal venstresiden nå være den deriverte av et produkt!)

Vi kontrollerer og får:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x^2}\right) = 1 \quad \text{som gir:} \quad \frac{y}{x^2} = x + C$$

eller $\underline{y = x^3 + Cx^2}$

EKS. MA 1102, 19/5-04 (forts.)

Initialbetingelsen $y(1) = 3$ gir:

$$3 = 1^3 + C \cdot 1^2 = 1 + C \quad \therefore \quad C = 2$$

Den søkte løsning er derfor:

$$\underline{y = x^3 + 2x^2}$$

OPPG. 3:

(a) Newtons avkjølingslov:

$$y'(t) = k(y_R - y(t)),$$

der $y(t)$ er gjenstandens temperatur ved tiden t og y_R er romtemperaturen. Her er $y_R = 19°C$. Vi har:

$$y'(t) = k(19 - y(t))$$

(b) Differensialligningen i (a) er separabel og kan skrives:

$$\frac{dy}{dt} = k(19 - y(t))$$

som ved standard-metoden gir:

$$\int \frac{dy}{19 - y} = \int k\,dt$$

Hvorfor?

$$-\ln(y - 19) = kt + \ln C \qquad (|y - 19| = y - 19)$$

eller:

$$\frac{1}{y - 19} = Ce^{kt}$$

eller ekvivalent:

$$y - 19 = Ke^{-kt}$$

$$\underline{y = 19 + Ke^{-kt}}$$

Ved tiden $t = 0$ har vi $y(0) = 79$:

$$79 = y(0) = 19 + K$$

D.v.s.: $K = 60$

EKS. MA 1102, 19/5-04 (forts.)

$$y = 19 + 60e^{-kt}$$

Videre har vi:

$$46 = 19 + 60e^{-5k}$$

eller: $27 = 60e^{-5k} \quad \therefore \quad e^{-5k} = \frac{27}{60}$

Vi ønsker å bestemme $y(10)$:

$$y(10) = 19 + 60e^{-10k}$$

$$y(10) = 19 + 60(e^{-5k})^2 = 19 + 60\left(\frac{27}{60}\right)^2$$

$$= 19 + \frac{27^2}{60} = 19 + \frac{243}{20} = 19 + 12.15 = \underline{31.15}$$

OPPG. 4:

$y'' - 4y' + 4y = 0$ har algebraisk ligning: $r^2 - 4r + 4 \equiv (r-2)^2 = 0$

Altså har vi allmen løsning:

$$y = (C_1 t + C_2)e^{2t}$$

Dette gir:

$$y' = C_1 e^{2t} + (C_1 t + C_2) \cdot 2e^{2t} = (2C_1 t + (C_1 + 2C_2))e^{2t}$$

Initialbetingelsene $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ gir:

$$y(0) = C_2 e^0 = C_2 = 1$$

$$y'(0) = (C_1 + 2C_2)e^0 = C_1 + 2C_2 = 2$$

gir: $C_2 = 1$, $C_1 = 0$.

Den søkte løsning blir dermed:

$$\underline{y = e^{2t}}$$

OPPG. 5:

(a) Vi ser først på det ubestemte integralet: $\int \frac{dx}{x \ln x}$, der vi substituerer $u = \ln x$ og får $du = \frac{dx}{x}$. Dette gir:

EKS. MA 1102, 19/5-04 (forts.)

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + K$$

$$= \ln|\ln x| + K.$$

Dette gir:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{T\to\infty} \int_2^T \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{T\to\infty}(\ln(\ln T) - \ln(\ln 2))$$

$$= \infty \quad \text{siden} \quad \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty.$$

Altså divergerer integralet

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x}$$

(b) Ut fra integral-testen vil rekken

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\ln n}$$

divergere siden integralet i (a) divergerer. (Det innsees lett at betingelsen for å benytte integral-testen er oppfylt. Se s. 535, Adams.)

OPPG. 6:

(i) R ("bare hvis" er ekvivalent med "$\Rightarrow$". Teorem 4, s. 532

(ii) R ("dersom" er ekvivalent med "$\Leftarrow$".) Teorem 4, s. 532,

(iii) G ($\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ er den harmoniske rekke som divergerer.)

(iv) R (Ex. 3, s. 531)

(v) G (Moteksempel: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ konvergerer.)

(vi) G ($\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergerer; Ex. 1, s. 537)

(vii) R ("Leibnizs berömte formel for $\frac{\pi}{4}$.)

LØSNING:

MA 1102 - Grunnkurs i analyse II

Torsdag 15/12 - 2005

OPPGAVE 1:

Vi skal klassifisere kurven:

$$x^2+2x-y=3$$

Ekvivalent:

$$x^2+2x+1-y=4$$

eller:

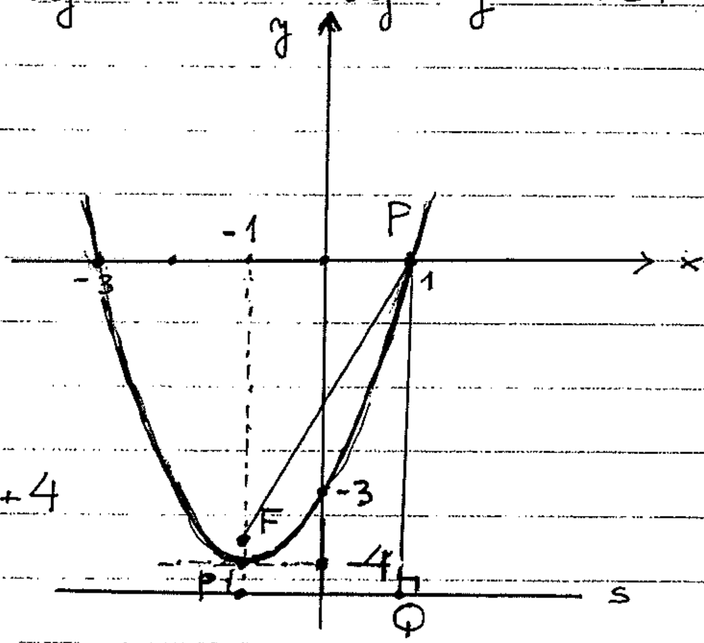
$$(x+1)^2=y+4$$

- Vi ser at dette blir en parabel med "topp-punkt" (hjørne) i $(-1,-4)$. Den skjærer x-aksen i $x=-3$ og $x=1$ og y-aksen i $y=-3$. I følge læreboken, s. 479, vil

$$X^2=4aY$$

for en parabel gjennom origo i (X,Y)-systemet ha styrelinje (directrix)

$$Y=-a$$



- Settes $X=x+1$, $Y=y+4$ får vi $4a=1$ m.a.o. $a=1/4$. Dette gir styrelinje: $y+4=Y=-\frac{1}{4}$, d.v.s. $y=-4-\frac{1}{4}=-\frac{17}{4}$. F har koordinater: $(0,\frac{1}{4})$ i XY-systemet, d.v.s. $X=x+1=0$, $Y=y+4=\frac{1}{4}$ eller: $\underline{F=(-1,-\frac{15}{4})}$, brennpunkt.

ALTERNATIVT:

$F=(-1,-4+p)$, $s:\ y=-4-p$. Ut fra definisjonen må vi da ha: $|FP|=|PQ|$ eller:

$$\sqrt{(1+1)^2+(-4+p)^2}=|-4-p| \quad \therefore \quad p=\frac{1}{4}.$$

OPPGAVE 2:

$x'(t) = 3t^2-2$, $x(1) = 1-2 = -1$, $x'(1) = 1$

$y'(t) = 1+3t^2$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 4$

Altså har tangenten i det aktuelle punktet parameterligningen:

$$\left.\begin{aligned} x &= -1 + u \\ y &= 2 + 4u \end{aligned}\right\} \quad u \in \mathbb{R}$$

OPPGAVE 3:

(a) Den tilsvarende algebraiske ligning er:

$$r^2 + 2r + 5 = 0$$

eller $r^2 + 2r + 1 = -4$ med rötter:

$$r = -1 \pm 2i$$

I følge teorien blir dermed den allmenne lösning:

$$\underline{y = e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)}$$

(b) Vi har initialbetingelsene:

$$y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 2$$

$$0 = y(0) = e^0(A\cos 0 + B\sin 0) = A \; ;$$

d.v.s. lösningen har formen:

$$y = Be^{-x}\sin 2x$$

$$y' = B(-e^{-x}\sin 2x + 2e^{-x}\cos 2x)$$

$$y'(0) = B(0 + 2 \cdot 1) = 2 \quad , \text{ d.v.s. } \quad B = 1$$

Den sökte spesielle lösning blir derfor:

$$\underline{y = e^{-x}\sin 2x}$$

OPPGAVE 4:

(a) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{2}}$

$f(8) = \sqrt[3]{8} = 2$, $f'(8) = \frac{1}{3}\frac{1}{2^2} = \frac{1}{12}$, $f''(8) = -\frac{2}{9}\frac{1}{2^5} = -\frac{1}{144}$

Taylor-polynomet av grad 2 nær $x=8$ blir dermed:

$$P_2(x) = 2 + \frac{1}{1!}\frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{2!}\frac{1}{144}(x-8)^2$$

$$= \underline{2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{288}(x-8)^2}$$

(b)

$$P_2(9) = 2 + \frac{1}{12}\cdot 1 - \frac{1}{288}(1)^2 = 2 + 0.08333 - 0.003472$$
$$= \underline{2.079861}$$

Direkte på lommeregneren: $\underline{2.080083}$

OPPGAVE 5:

$$\frac{dp}{dt} = kp \quad , \quad \text{der } k<0 \text{ er konstant,}$$

er en separabel differensialligning:

$$\int \frac{dp}{p} = k\int dt$$

som gir:

$$\ln|p(t)| = kt + \ln K$$

eller $\quad p(t) = Ke^{kt}$

$p(0) = 100$, gir $\quad Ke^0 = 100, \therefore K = 100$

Den allmenne løsning blir derfor:

$$p(t) = 100e^{kt}$$

Vi får dessuten opplyst at $p(1) = 99.75$.

Dette gir: $\quad p(1) = 100e^k = 99.75$

eller $\quad e^k = 0.9975$.

Vi kaller halveringstiden for stoffet $t_{1/2}$. Vi har da:

$$p(t_{1/2}) = 50 = 100e^{kt_{1/2}}$$

Dette gir: $\quad e^{kt_{1/2}} = \frac{1}{2} \quad$ eller

$(0.9975)^{t_{1/2}} = \frac{1}{2} \quad$ eller: $t_{1/2} = \dfrac{-\ln 2}{\ln 0.9975} \approx$

$$\frac{-0.693147}{-0.0043093} \approx \underline{161 \text{ år}}$$

OPPGAVE 6:

(a) INTEGRALTESTEN FOR POSITIVE REKKER: (s. 535, Adams)

Anta at $f: [N, \infty[\to \mathbb{R}$ er positiv, kontinuerlig og ikke-voksende, og la $a_n = f(n)$ for $n \in [N, \infty[$, der N er et naturlig tall. Da vil rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergere hvis og bare hvis integralet $\int_N^{\infty} f(t)\,dt$ konvergerer.

(b) Vi studerer integralet:

$$\int_1^x \frac{dt}{t^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p}\left(x^{-p+1} - 1\right) & \text{for } p \neq 1 \\ \ln x & \text{for } p = 1 \end{cases}$$

• Siden $\lim_{x \to \infty} x^{1-p} = \infty$ når $\underline{p < 1}$, har vi at integralet:

$$\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^p} \text{ divergerer i dette tilfellet.}$$

Altså <u>divergerer</u> rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ for $\underline{p < 1}$ ut fra (a).

• $\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$, gir at integralet $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t}$ divergerer for $p = 1$. Altså <u>divergerer</u> den harmoniske rekke $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

• For $p > 1$ vil $\lim_{x \to \infty} x^{1-p} = 0$. Altså <u>konvergerer</u> integralet $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ og rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ når $\underline{p > 1}$.

(c)
$$\int_2^T \frac{dt}{t \ln t} = \ln(\ln t)\Big|_2^T = \ln(\ln T) - \ln(\ln 2)$$

$\to \infty$ når $T \to \infty$. Altså <u>divergerer</u> rekken

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \text{ ut fra integralkriteriet.}$$

MA1102, EKSAMEN 24/5-05

LØSNINGER:

OPPGAVE 1:

(a) Vi skal bestemme den allmenne løsning for differensial-ligningen:

$$y'' + 2y' + 3y = 0$$

Den tilhørende algebraisk ligning:

$$r^2 + 2r + 3 = 0$$

har røtter: $r = \frac{1}{2}[-2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 1\cdot 3}] = \begin{cases} -1 + i\sqrt{2} \\ -1 - i\sqrt{2} \end{cases}$

Den allmenne løsning blir derfor:

$$\underline{y = e^{-x}(A\cos(\sqrt{2}x) + B\sin(\sqrt{2}x))}$$

(b)

Vi skal løse initialverdi-problemet:

$$y' + y = x \quad ; \quad y(0) = 2$$

Vi må finne integrerende faktor $e^{\mu(x)}$ der $\mu(x) = \int 1\,dx = x$ (der vi velger å sette integrasjonskonstanten lik 0.) Altså:

$$e^x y' + e^x y = e^x \cdot x$$

eller: $\frac{d}{dx}(e^x y) = e^x \cdot x$

som gir:

$$e^x y = \int x e^x dx = x e^x - \int 1 \cdot e^x dx$$

$= xe^x - e^x + K$ som gir allmen løsning: $y = x - 1 + Ke^{-x}$. Videre har vi: $2 = y(0) = 0 - 1 + Ke^0 = -1 + K$

Dette gir $K = 3$. Den spesielle løsning som er løsning for vår initialproblem blir dermed:

$$\underline{y = x - 1 + 3e^{-x}}$$