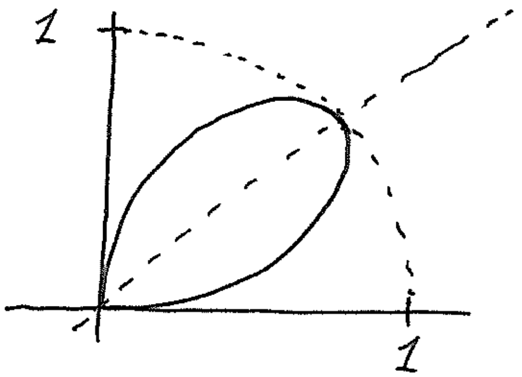
Løsninger

Eksamen MA1102 — GK analyse II

26. mai 2008

1. a) $0 \leq \theta \leq \pi/2$, så kurven ligger i første kvadrant. $\theta = 0$ gir $r = \sin 0 = 0$ og $\theta = \pi/2$ gir $r = \sin \pi = 0$, så vi har en lukket kurve, origo er et punkt på kurven, og både x-aksen og y-aksen er "tangenter" til kurven i origo.

   $\sin 2\theta = 1$ når $\theta = \pi/4$, så kurven er lengst fra origo når $\theta = \pi/4$. Vi har også at $\sin 2\theta = \sin(\pi - 2\theta) = \sin(2(\pi/2 - \theta))$, så kurven er symmetrisk om linja $\theta = \pi/4$ (eller $y = x$, om du heller vil bruke slike koordinater). Fra dette får vi skissen



   b)

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{\pi/2} \frac{r^2}{2} d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 2\theta}{2} d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2(2\theta)\right) d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} 1 - \cos 4\theta d\theta = \frac{1}{4}[\theta]_0^{\pi/2} - \frac{1}{16}[\sin u]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{8}
\end{aligned}
$$

   der vi har brukt substitusjonen $u = 4\theta$. Arealet innenfor kurven er altså $\frac{\pi}{8}$.

2. Parabelen gitt ved $8x + y^2 = 24$ er symmetrisk om x-aksen, så toppunktet må ligge på denne aksen: $y = 0$ gir $8x = 24$, så toppunktet ligger i $(0, 3)$. Styrelinja er normal på symmetriaksen, så styrelinja må være gitt av en ligning på formen $x = a$. Vi vet at brennpunktet ligger i $(1, 0)$ og at toppunktet må ligge midt mellom styrlinja og brennpunktet, så vi må ha $a = 5$. Styrelinja er altså gitt ved $x = 5$.

3. Hvis $f(x) = 1/(x(\ln x)^2)$, har vi at f er positiv, kontinuerlig og ikke-økende på $[2,\infty)$, og
$$f(n) = \frac{1}{n(\ln n)^2}, \qquad n \in \{3,4,5,\dots\}.$$
$$\begin{aligned}\int_2^\infty f(x)dx &= \int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2}dx = \int_{\ln 2}^\infty \frac{1}{u^2}du = \lim_{b\to\infty}\int_{\ln 2}^b \frac{1}{u^2}du = \lim_{b\to\infty}[-u^{-1}]_{\ln 2}^b \\ &= \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{b} - \left(-\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}.\end{aligned}$$
Vi har dermed at dette uekte integralet konvergerer, og da sier integraltesten at den tilsvarende rekken også konverger. Altså konvergerer rekken.

4. Dette er en potensrekke, så vi vet den konverger på intervallet der den konvergerer absolutt, i tillegg til muligens i endepunktene. Vi bruker forholdstesten til å sjekke for absolutt konvergens.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{x^{2(n+1)}}{(n+1)^2}\right|}{\left|\frac{x^{2n}}{n^2}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^2 n^2}{(n+1)^2} = |x|^2 \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+2/n+1/n^2} = |x|^2.$$
I følge forholdstesten har vi dermed at rekken konvergerer absolutt for $|x|^2 < 1$. Vi har også at rekken divergerer for $|x|^2 > 1$. Vi sjekker endepunktene for konvergensintervallet, $x=-1$ og $x=1$: I begge tilfellene får vi rekken $\sum_{n=1}^\infty n^{-2}$, som er en p-rekke med $p=2>1$. Dermed vet vi at rekken konvergerer. (Du kunne også brukt integraltesten hvis du ikke husker resultatet for p-rekker.) Dermed har vi at konvergensområdet for rekken $\sum_{n=1}^\infty x^{2n}/n^2$ er intervallet $[-1,1]$.

5. Vi kan parametrisere kurven med $y=t^3$, $x=t^2$, $0 \le t \le 1$. Dermed får vi buelengde
$$\begin{aligned}L &= \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt = \int_0^1 \sqrt{(2t)^2+(3t^2)^2}dt = \int_0^1 \sqrt{t^2}\sqrt{4+9t^2}dt \\ &= \int_0^1 t\sqrt{4+9t^2}dt = \frac{1}{18}\int_4^{13}\sqrt{u}du = \frac{1}{18}\frac{2}{3}[u^{3/2}]_4^{13} = \frac{1}{27}(13^{3/2}-4^{3/2}) = \frac{1}{27}(13^{3/2}-8).\end{aligned}$$
(En annen måte å finne buelengden på er å se at kurven er grafen til $f(x)=x^{3/2}$, og regne ut $\int_0^1 \sqrt{1+f'(x)^2}dx$.)

6. Vi vet at restleddet i Taylors formel, $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$, kan skrives
$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}x^{n+1},$$
der s er et tall mellom 0 og x. For problemet vårt får vi
$$E_n(1/10) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(1/10)^{n+1},$$

der s er et tall $0 \leq s \leq 1/10$. Vi vil finne et heltall n slik at $|E_n(1/10)| \leq 1/1000$. $f^{(n+1)}(s)$ er enten $\cos s$, $-\cos s$, $\sin s$ eller $-\sin s$, så uansett er $|f^{(n+1)}(s)| \leq 1$. Dermed har vi

$$|E_n(1/10)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(1/10)^{n+1}\right| \leq \frac{1}{(n+1)!}(1/10)^{n+1}.$$

Tar vi $n = 2$ får vi

$$|E_2(1/10)| \leq \frac{1}{3!}\frac{1}{10^3} = \frac{1}{6000} < \frac{1}{1000}.$$

Dermed vet vi at andreordens Taylorpolynom om $x = 0$ gir oss tilstrekkelig nøyaktighet.

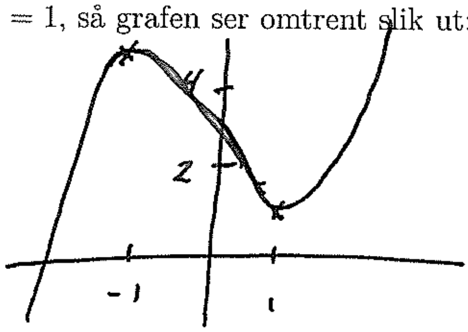
$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = 0 + \cos(0)x - \frac{\sin(0)}{2}x^2 = x$$

så $P_2(1/10) = 1/10$. Dermed har vi at $\sin(1/10) \approx 1/10$, og feilen $|\sin(1/10) - 1/10| \leq 1/6000$.

7. Jeg begynner med å lage en skisse av grafen til $f(x) = x^3 - 3x + 3$ for å få et fornuftig valg av x_0; i nærheten av et nullpunkt.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$

så vi får topp-/bunnpunkt i $x = -1$ og $x = 1$. $f(-1) = -1 + 3 + 3 = 5$ og $f(1) = 1 - 3 + 3 = 1$, så grafen ser omtrent slik ut:



Fra denne skissen ser jeg at funksjonenen kun har ett nullpunkt, og at dette ligger "til venstre for" $x = -1$. Jeg prøver derfor med $x_0 = -2$. Jeg bruker formelen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

(Hvis du ikke husker formelen kan du fortsatt bruke metoden: Finn tangenten og sjekk når den gir null...) og bruker denne til jeg finner en x_n som gir meg $|f(x_n)| \leq 1/10$.

$f(-2) = 1$ og $f'(-2) = 9$, så jeg får $x_1 = -2 - \frac{1}{9} = -19/9$.

$f(-19/9) = (-19)^3/9^3 - 3(-19/9) + 3 = -55/729$.

$|f(-19/9)| = 55/729 \le 55/550 = 1/10$, så $x_1 = -19/9$ er et tall som gir $|f(x_1)| \le 1/10$.

(Hvis du hadde startet med et annet tall enn -2 ville du også få et annet svar. For eksempel må du gå lenger enn til x_1 hvis du starter med $x_0 = -3$.)

8. a) Vi skal vise at hvis x er et tall på intervallet $[0, 1]$, så har vi

$$\lim_{n\to\infty} x^n(1 - x^n) = 0.$$

Hvis $x = 1$ har vi $1^n(1 - 1^n) = 0$ for alle n.

Når $0 \le x < 1$ har vi $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$, og $0 \le x^n(1 - x^n) \le x^n$. Dermed gir skvisesetningen oss at $\lim_{n\to\infty} x^n(1 - x^n) = 0$ for $0 \le x < 1$.

Setter vi sammen det vi har gjort får vi $\lim_{n\to\infty} x^n(1 - x^n) = 0$ for $0 \le x \le 1$.

b) Løst sagt betyr uniform konvergens av f_n mot f at hvis du ønsker at grafen til f_n og f skal være nærme hverandre, så kan du garantere det, hvis du bare går langt nok ut i følgen. Det betyr at vi sier noe om alle x i intervallet samtidig, ikke bare en om gangen.

Mer formelt må vi vise at for en hver gitt $\epsilon > 0$ finnes det et tall N slik at $n \ge N$ garanterer at $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ for alle $x \in [0, 1]$.

La oss se på det som skal være lite, $|f_n(x) - f(x)|$:

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n(1 - x^n) - 0| = x^n(1 - x^n) = f_n(x).$$

Vi skal dermed sjekke om $f_n(x)$ er liten for alle x i intervallet, så det er naturlig å se etter maksimum for f_n :

f_n er kontinuerlig og deriverbar på hele tallinja, så et maksimum vil skje enten på endepunktene til intervallet eller der den deriverte er null. $f_n(0) = f_n(1) = 0$ og $f_n'(x) = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1} = nx^{n-1}(1 - 2x^n)$. Dermed ser vi at f_n har maksimum for $x = (1/2)^{1/n}$.

$$f_n((1/2)^{1/n}) = ((1/2)^{1/n})^n(1 - ((1/2)^{1/n})^n) = (1/2)(1/2) = 1/4.$$

Dermed ser vi at hvis vi for eksempel velger $\epsilon = 1/10$ så vil det for hver funksjon f_n alltid finnes et tall x i intervallet slik at $f_n(x) > \epsilon$. Altså konvergerer følgen f_n *ikke* uniformt mot f.