EKSAMEN,

MA 1102/MA6102 Grunnkurs i analyse II, 7/12-06

#1

$$4x^2 - (y^2 + 4y + 4) = -4$$

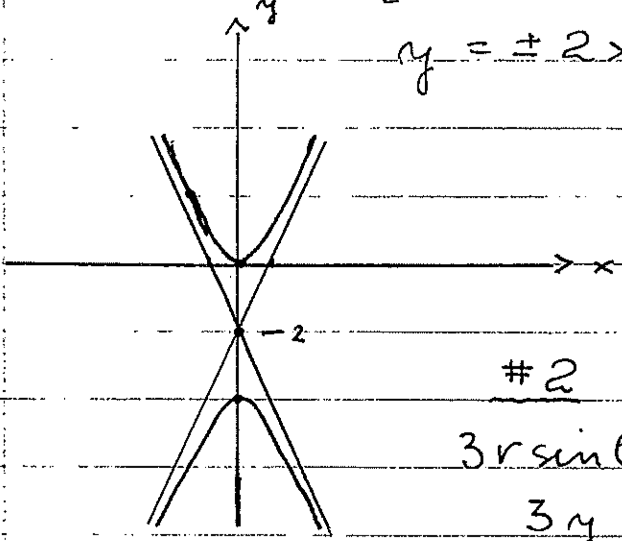
$$\frac{(y+2)^2}{2^2} - x^2 = 1$$ Kurven er en hyperbel. Sentrum i $(0,-2)$

Reell akse: $x = 0$ (y-aksen) siden $y = -2$ ikke gir noen løsninger.

Asymptoter:

$$\frac{y+2}{2} = \pm x \quad \text{d.v.s.}$$

$$y = \pm 2x - 2$$



$x = 0$ gir

$y + 2 = \pm 2$

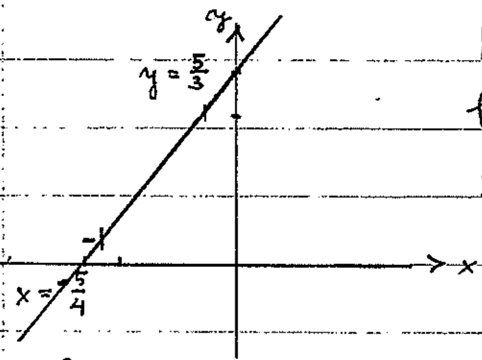
$y = -4, \; y = 0$

#2

$$3r\sin\theta - 4r\cos\theta = 5$$

$$3y - 4x = 5$$

Dette blir en rett linje som skjærer x-aksen i $(-\frac{5}{4}, 0)$ og y-aksen i $(0, \frac{5}{3})$



#3

(a) $y'' + y' - 2y = 0$ har tilhørende algebraisk ligning:

$$0 = r^2 + r - 2 = (r+2)(r-1)$$

Den generelle løsning av den homogene ligning blir derfor:

$$y_H = Ae^{x} + Be^{-2x}$$

Ut fra teorien skal en partikulær (spesiell) lösning av den innhomogene likning ha formen: $y_p = A$

Innsetting gir: $y_p' = 0$, $y_p'' = 0$

$y_p'' + y_p' - 2y_p = -2A = 1 \quad \therefore \quad A = -\frac{1}{2}$

Den allmenne lösning for den inhomogene ligning blir dermed:

$$\underline{y} = y_H + y_p = \underline{Ae^{x} + Be^{-2x} - \tfrac{1}{2}}$$

(b) Den söhte spesielle lösning av differensialligningen i (a) skal oppfylle: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

$0 = y(0) = A + B - \frac{1}{2}$

$y'(x) = Ae^{x} - 2Be^{-2x}$ og dermed:

$1 = y'(0) = A - 2B$ Vi har m.a.o. ligningssystemet:

$$\left.\begin{aligned} A + B &= \tfrac{1}{2} \\ A - 2B &= 1 \end{aligned}\right] \begin{matrix} \times 2 \\ \times 1 \end{matrix} \quad \text{adderer!}$$

Som gir: $3A = 2 \iff A = \frac{2}{3}$

$B = \frac{1}{2} - A = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{3-4}{6} = -\frac{1}{6}$

$$\underline{y = \tfrac{2}{3}e^{x} - \tfrac{1}{6}e^{-2x} - \tfrac{1}{2}}$$

#4

(a) $\underline{\frac{d}{dt}(\sinh t)} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(e^{t} - e^{-t})\right) = \frac{1}{2}(e^{t} + e^{-t}) = \underline{\cosh t}$

$\underline{1 + \sinh^2 t} = 1 + \frac{1}{4}(e^{t} - e^{-t})^2 = 1 + \frac{1}{4}(e^{2t} - 2 + e^{-2t})$

$= \frac{1}{4}(e^{2t} + 2 + e^{-2t}) = \left(\frac{1}{2}(e^{t} + e^{-t})\right)^2 = \underline{\cosh^2 t}$

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \,?\quad ; \quad a>0$

Vi innfører $x = a\sinh t$ og får: $dx = a\cosh t\,dt$
som gir:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{a\cosh t\,dt}{\sqrt{a^2\sinh^2 t + a^2}} \overset{a>0}{\downarrow}{=} \int \frac{\cancel{a}\cosh t}{\cancel{a}\sqrt{1+\sinh^2 t}}\,dt$$

$$= \int \frac{\cancel{\cosh t}}{\cancel{\cosh t}}\,dt = \int dt = t + K$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \sinh t = \tfrac{1}{2}e^{t} - \tfrac{1}{2}e^{-t} \\ \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1} &= \cosh t = \tfrac{1}{2}e^{t} + \tfrac{1}{2}e^{-t} \end{aligned}\right\} \text{Adderer}$$

$$\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1} = e^{t} \qquad \text{som gir:}$$

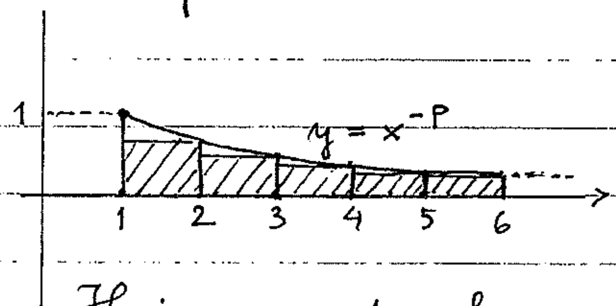
$$t = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) - \ln a$$

Altså får vi:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \underline{\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + K}$$

#5

La $p>0$. Da har vi kurven



$$y = x^{-p}$$

der $\lim_{x\to\infty} y = 0$

og $y(1) = 1$

Hvis $p>1$ har vi at arealet

$$\int_1^N x^{-p}\,dx = \left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^N = \frac{1}{p-1}\left(1 - N^{1-p}\right)$$

og dermed vil $\displaystyle\int_1^\infty x^{-p}\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_1^N x^{-p}\,dx = \frac{1}{p-1} < \infty$

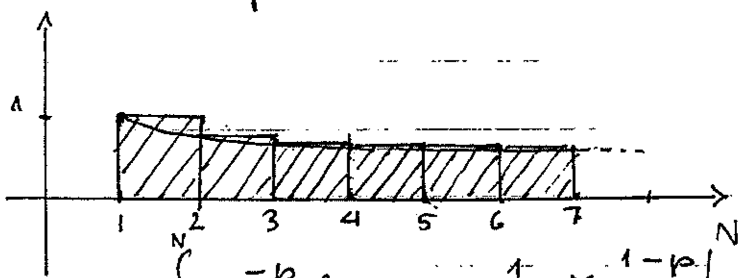
Altså konvergerer integralet når $p > 1$.
Arealet av de skraverte rektanglene er mindre enn arealet under kurven:

$$\sum_{n=2}^{N} n^{-p} \le \int_{1}^{N+1} x^{-p}\,dx < \frac{1}{p-1}$$

Siden p er fast får vi at rekken med de positive ledd $1/n^{p}$ også konvergerer for $p > 1$. M.a.o.

$$\underline{p > 1} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n^{-p} \text{ konvergerer} \Rightarrow \underline{\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} \text{ konvergerer.}}$$

For $0 < p \le 1$ har vi: $\lim_{x\to\infty} x^{-p} = 0$ som foran. Men siden har vi:



$\underline{0<p<1}$ $$\int_{1}^{N} x^{-p}\,dx = \frac{1}{1-p} x^{1-p}\Big|_{1}^{N} = \frac{1}{1-p}\left(N^{1-p}-1\right) \underset{N\to\infty}{\to} \infty$$

$\underline{p=1}$ $$\int_{1}^{N} x^{-1}\,dx = \ln x\Big|_{1}^{N} = \ln N \underset{N\to\infty}{\to} \infty$$

Altså divergerer integralet i dette tilfellet.
Videre ser vi av figuren at:

$$\sum_{n=1}^{N} n^{-p} > \int_{1}^{N} x^{-p}\,dx,$$ d.v.s. at

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} n^{-p} = \infty$$

Altså:

$$\underline{0 < p \le 1} \Rightarrow \underline{\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} \text{ divergerer.}}$$

For $p \le 0$ vil rekken opplagt divergere da $1/n^{p} = n^{-p} \ge 1$.

#6

(a) Vi benytter forholdskriteriet:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+4}{n+3}|x| = \lim_{n\to\infty}\frac{1+4/n}{1+3/n}\cdot|x|$$

$= |x|$. Altså har vi konvergens for $|x|<1$, divergens for $|x|>1$

For $x=\pm 1$, har vi

$$\lim_{n\to\infty}(n+3)|x|^n = \infty.$$

Altså divergens for $x=\pm 1$.

(b) Vi setter $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+3)x^n$ for $x\in(-1,1)$. Vi har da:

$$x^2 s(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+3)x^{n+2}$$
$$= 3x^2 + 4x^3 + \dots + (n+1)x^n + \dots$$

Vi har for $|x|<1$:

$$x^3 + x^4 + \dots + x^{n+1} + \dots = \frac{x^3}{1-x}$$

(geometrisk rekke med $a_0 = x^3$ og $k = x$): $x^2 s(x) = \sum_{n=3}^{\infty} n x^{n-1} =$

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{d}{dx}(x^n) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{1-x}\right)$$ siden derivasjon ledd for ledd er lovlig i intervallet $(-1,1)$.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{1-x}\right) = \frac{3x^2(1-x)+x^3}{(1-x)^2} = \frac{3x^2-2x^3}{(1-x)^2}$$

Altså: $x^2 s(x) = \dfrac{3x^2-2x^3}{(1-x)^2}$

eller:

$x\neq 0$ $\quad \underline{s(x) = \dfrac{3-2x}{(1-x)^2}}$; $x\in(-1,1)\setminus\{0\}$

$x=0$ $\quad \underline{s(0) = 3}$ (Formelen gjelder også for $x=0$)