Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Førsteamanuensis Per Hag
(735 91743)

Eksamen i MA1102 Grunnkurs i analyse II

Torsdag 1. juni 2006
Tid: 09.00 - 13:00
Hjelpemidler: Godkjent kalkulator (HP30S)
Bokmål

Sensur: Torsdag 22. juni 2006

Oppgave 1

En kurve er gitt i polarkoordinater ved ligningen:

$$r = \frac{3}{\sin\theta}$$

Skriv om ligningen til kartesiske koordinater. Hva slags kurve er dette?

Oppgave 2

Benytt Newtons metode en gang på funksjonen

$$f(x) = x^2 - 2$$

med $x_0 = \frac{3}{2}$ for å finne en tilnærmet verdi av $\sqrt{2}$.

Oppgave 3

Finn buelengden for kurven

$$x = t + \sin t\,, \quad y = \cos t; \quad 0 \le t \le \pi$$

Oppgave 4

Bestem ligningen for kurven som bestemmes ved at et vilkårlig punkt $P = (x, y)$ på kurven har samme avstand til linjen $x = -1$ som til origo. Hvilken type kurve blir dette? Lag en skisse av kurven.

Oppgave 5

a) Bevis formelen:

$$1 + k + k^2 + \ldots + k^n = \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1} \quad \text{når } k \neq 1.$$

b) Benytt formelen i (a) til å bevise at for alle x gjelder:

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \int_0^x \frac{(-t^2)^n dt}{1+t^2}.$$

c) Benytt formelen i (b) til å bevise Gregorys/Leibnizs formel:

$$(*) \qquad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \ldots$$

d) Skriv opp Abels (kontinuitets)setning. (Bevis kreves ikke!) Benytt Abels setning til å gi et alterativt bevis for formelen (*) i punkt (c).

Oppgave 6

STUDENTNUMMER:

Dette arket skal besvares og leveres inn.

I denne oppgaven skal det bare settes ring rundt det riktige alternativet i hvert punkt.

a) Rekken $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+n\sqrt{n}}$:

(i) divergerer,

(ii) konvergerer betinget,

(iii) konvergerer absolutt.

b) Rekken $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$:

(i) konvergerer for alle reelle tall x,

(ii) konvergerer i $[-1,1]$

(iii) konvergerer i $[-1,1[$

c) Rekken $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ er Maclaurinrekken for:

(i) $\sin x$,

(ii) e^x,

(iii) $\cosh x$.

d) Rekken $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} x^n$ har for $x \in \;]-2,2[$ summen:

(i) $\ln(2-x)$,

(ii) $2/(2-x)^2$,

(iii) $1/(2-x)$.