MA1102 Grunnkurs i analyse II
Semesterprøve tirsdag 11/3 2008, 15:15-16:30
Fasit og noen kommentarer

Oppgave 1: En av rekkene nedenfor **divergerer**, hvilken?

a)$\square \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ b)$\square \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ c)$\boxed{\text{x}} \sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n$ d)$\square \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3 e^n}$ e)$\square \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi)$

Oppgave 2: Hvilket av følgende utsagn er **sant**?

a)$\square$ Alle begrensede følger konvergerer
b)$\boxed{\text{x}}$ Alle følger som er avtagende og begrenset nedad konvergerer
c)$\square$ Alle voksende følger divergerer
d)$\square$ Hvis en følge divergerer, så må den være voksende.

Oppgave 3: Den kartesiske ligningen til kurven som i polarkoordinater er gitt ved $r = (1-\cos\theta)^{-1}$ er

a)$\boxed{\text{x}}$ $y^2 - 2x - 1 = 0$ b)$\square$ $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$
c)$\square$ $\sqrt{x^2+y^2} = 1 - x$ d)$\square$ $y = 1 + x$

Oppgave 4: Hvilke kjeglesnitt har følgende egenskap: Alle stråler som sendes ut fra ett av brennpunktene reflekteres i kjeglesnittet slik at strålen går videre gjennom det andre brennpunktet.

a)$\square$ alle parabler b)$\square$ alle hyperbler c)$\boxed{\text{x}}$ alle ellipser d)$\square$ kun sirkler

Oppgave 5: Buelengden til kurven gitt ved parameterfremstillingen $x(t) = 2t^3$, $y(t) = 3t^2$, $1 \le t \le 2$ er

a)$\square$ $2(2\sqrt{2} + 5\sqrt{5})$ b)$\square$ $2(2\sqrt{2} - 1)$
c)$\square$ $2(2\sqrt{2} - 5\sqrt{5} + 2)$ d)$\boxed{\text{x}}$ $2(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})$

Oppgave 6: Taylorpolynomet til $f(x) = \int_{-1}^{x} \sqrt{t+5}\, dt$ av grad 2 om $x = -1$ er

a)$\square$ $P_2(x) = 2 + 2(x+1) + \frac{1}{4}(x+1)^2$ b)$\square$ $P_2(x) = 2(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)^2$
c)$\boxed{\text{x}}$ $P_2(x) = 2(x+1) + \frac{1}{8}(x+1)^2$ d)$\square$ $P_2(x) = 2(x+1) + \frac{1}{4}(x+1)^2$

Oppgave 7: For en bestemt funksjon f får du oppgitt at P_4 er fjerdegrads Taylorpolynom til f om $x = 2$, at $P_4(3) = 1$ og at $f^{(5)}(x) = 2^x$. Fra dette kan du konkludere **en** av følgende påstander. Hvilken?

a)$\square$ $0,999 \le f(3) \le 1,001$ b)$\square$ $0,99 \le f(3) \le 1,01$
c)$\boxed{\text{x}}$ $1 \le f(3) \le 1,1$ d)$\square$ $0,9 \le f(3) \le 1$

Oppgave 8: Tegn en skisse av kurven gitt i polarkoordinater ved

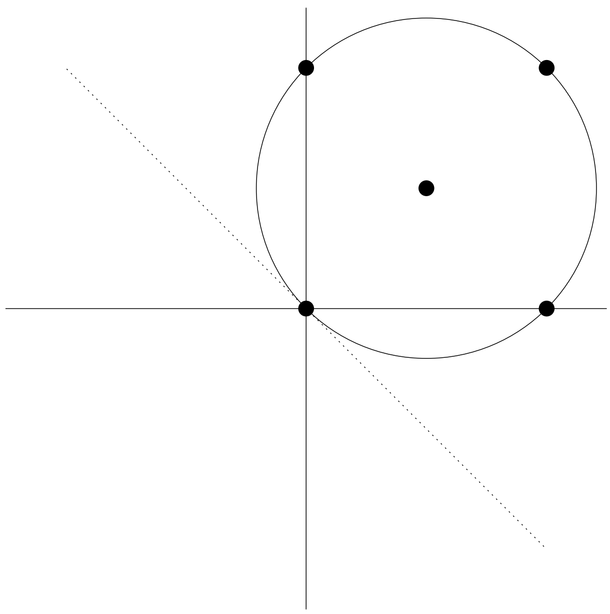
$$r = \cos\theta + \sin\theta, \qquad -\pi/4 \le \theta < 3\pi/4$$

og vis at kurven er en sirkel.

Jeg begynner med å finne noen punkter på kurven:

θ	$-\pi/4$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$
r	0	1	$\sqrt{2}$	1	0

Fra det første og siste punktet i tabellen ser jeg at dette er en lukket kurve, og at linjen $y = -x$ tangerer kurven i origo. Hvis jeg antar at kurven er en sirkel (noe jeg skal vise senere) vet jeg dermed at sentrum til sirkelen må ligge på linja $y = x$ (fordi tangenten vil stå normalt på radien). Det tredje punktet i tabellen ligger også på linja $y = x$, så sentrum må ligge midt i mellom dette punktet og origo, med andre ord i $(1/2, 1/2)$. Avstanden fra origo til sentrum er $\sqrt{2}/2$, så hvis kurven er en sirkel, så er det sirkelen med sentrum i $(1/2, 1/2)$ og radius $\sqrt{2}/2$.



La oss nå se at kurven faktisk er en sirkel.

$$\begin{aligned}
r &= \cos\theta + \sin\theta \\
r^2 &= r\cos\theta + r\sin\theta \\
x^2 + y^2 &= x + y \\
x^2 - x + y^2 - y &= 0 \\
x^2 - x + (1/2)^2 + y^2 - y + (1/2)^2 &= (1/2)^2 + (1/2)^2 = 1/2 \\
(x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 &= (\sqrt{2}/2)^2
\end{aligned}$$

Fra den siste ligningen ser vi at kurvener en sirkel med sentrum i $(1/2, 1/2)$ og radius $\sqrt{2}/2$.

Noen kommentarer

1. a) Dette er en p-rekke med $p = 2$, så denne vet vi at konvergerer. Hvis du ikke husker resultatet for slike rekker kan du bruke integraltesten.
   b) Dette er en geometrisk rekke som vi ikke bare vet at konvergerer, men også relativt greit kan finne hva den konvergerer mot
   c) Her går ikke leddene mot null, så denne rekken kan ikke konvergere, altså divergerer den.
   d) Denne rekken kan sammenlignes med f.eks. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$ eller med $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ som begge konvergerer.
   e) Dette er bare en vanskelig måte å skrive $0 + 0 + 0 + \cdots$ på, så denne rekken konvergerer.

   Riktig svar blir altså c)

2. a) $1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ er et eksempel på en begrenset rekke som divergerer, så dette utsagnet er usant.
   b) Dette tilsvarer resultatet om at alle voksende følger som er begrenset oppad konvergerer.
   c) $0, 1/2, 3/4, 7/8, 15/16, \ldots$ er en etterhvert gammel kjenning som både er voksende og konvergerer, så dette utsagnet er usant.
   d) Eksempelet i a) viser at dette er usant.

   (Du kan selvfølgelig finne et utall andre eksempler som viser at a),c) og d) er usanne påstander.)

3. Multipliser hver side av ligningen med $1 - \cos\theta$, så får du $r - r\cos\theta = 1$. Legg til $r\cos\theta$ på hver side, og gjennkjenn de kartesiske koordinatene, så får du $\sqrt{x^2 + y^2} = 1 + x$. Kvadrer hver side, så får du $x^2 + y^2 = 1 + 2x + x^2$. Etter litt "rydding" får du $y^2 - 2x - 1 = 0$ som er alternativ a). Alternativ c) kunne vært fristende, men som du ser i den fjerde ligningen her er et av fortegnene feil.

4. Sjekk 8.1 for refleksjonsegenskapene til de forskjellige kjeglesnittene.

5.

$$\begin{aligned} L &= \int_1^2 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt = \int_1^2 \sqrt{(6t^2)^2 + (6t)^2}dt = \int_1^2 \sqrt{6^2t^2(t^2+1)}dt \\ &= \int_1^2 6t\sqrt{t^2+1}dt = \int_2^5 3\sqrt{u}du = [2u^{3/2}]_2^5 = 2(5^{3/2} - 2^{3/2}) = 2(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}). \end{aligned}$$

   Her har vi brukt substitusjonen $u = t^2 + 1$. Hvis du glemmer å endre grensene for integrasjonen når du gjør substitusjonen så får du svaralternativ b).

6. For å finne Taylorpolynomet av grad 2 om $x = -1$ må vi ha $f(-1)$, $f'(-1)$ og $f''(-1)$. Fundamentalsetningen gir oss at $f'(x) = \sqrt{x+5}$, og en derivasjon til gir oss $f''(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+5}}$. Dermed får vi

$$\begin{aligned} f(-1) &= \int_{-1}^{-1} \sqrt{t+5}dt = 0 \\ f(-1) &= \sqrt{-1+5} = 2 \\ f(-1) &= \frac{1}{2\sqrt{-1+5}} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Dermed har vi at

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(-1) + f'(-1)(x-(-1)) + \frac{f''(-1)}{2}(x-(-1))^2 \\ &= 0 + 2(x+1) + \frac{1/4}{2}(x+1)^2 = 2(x+1) + \frac{1}{8}(x+1)^2. \end{aligned}$$

7. Som de fleste av dere fikk beskjed om var det en trykkfeil i de to første svaralternativene. Oppgaven er riktig slik den er gjenngitt på første siden her. Denne oppgaven vil ikke telle for de av dere som leverte før den beskjeden kom og som svarte feil. Uansett, her er en gjennomgang av oppgaven:

   Vi vet at

$$f(3) = P_4(3) + E_4(3)$$

   og at

$$E_4(3) = \frac{f^{(5)}(s)}{5!}(3-2)^5 = \frac{2^s}{5!}$$

   for en s mellom 2 og 3. 2^s er stigende, så

$$\begin{aligned} \frac{2^2}{5!} \leq \; & E_4(3) \leq \frac{2^3}{5!} \\ \frac{1}{30} \leq \; & E_4(3) \leq \frac{1}{15} \end{aligned}$$

   så

$$1,01 < 1 + \frac{1}{30} \leq f(3) \leq 1 + \frac{1}{15} < 1,1$$

   Dette viser at alternativ c) er riktig og de første ulikhetene viser at de tre andre alternativene er feil. (Med feilen i oppgaven var også a) og b) riktige, men da hadde du tre riktige svaralternativ, ikke bare ett.)