Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under Midtsemesterprøve:
Førsteamanuensis Per Hag, tlf. 91743

MIDTSEMESTERPRØVE I MA1102 GRUNNKURS I ANALYSE II

Bokmål
Onsdag 9. mars 2005
Tid 14.00 - 16.00

Hjelpemidler: Godkjent kalkulator (HP30S).

Oppgave 1

Løs initialverdi-problemet:

$$y'' - 2y' - 3y = 0; \qquad y(0) = 3, \qquad y'(0) = 1.$$

Oppgave 2

Skriv opp Taylor-polynomet av grad 4 for funksjonen $f(x) = \cos 2x$ omkring $a = 0$. (Det er ikke nødvendig å ta med utledningen av Taylor-polynomet i besvarelsen.) Benytt denne formelen til å beregne en tilnærmet verdi for $f(\frac{\pi}{12})$. Angi forskjellen mellom denne verdi og det man får ved å bruke lommeregneren direkte på $f(\frac{\pi}{12})$.

Oppgave 3

a) La $r = f(\theta)$ være en glatt kurve (smooth curve) gitt på polarkoordinat-form. Vis at stigningstallet til tangenten til kurven i punktet $[\theta, f(\theta)]$ er gitt ved:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta}$$

i punkter der $\frac{dx}{d\theta} \neq 0$.

b) Bestem den kartesiske ligningen til kurven som i polarkoordinater er gitt ved:

$$r = f(\theta) = \frac{1}{1 - \cos\theta}$$

Hvilken type kurve er dette? Lag en skisse av kurven.

c) Bestem ligningen til tangenten til kurven i punkt b) for $\theta = \frac{\pi}{2}$. (Denne ligningen skal angies i kartesiske koordinater.)

Oppgave 4

Funksjonene $\sinh x$ og $\cosh x$ er gitt ved:

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \qquad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

a) Bevis at:

(i) $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$

(ii) $1 + \sinh^2 x = \cosh^2 x$

(iii) $\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1$

(iv) $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$

b) Bevis at når $t = \sinh x$, så er:

$$x = \ln(t + \sqrt{1 + t^2})$$

c) Regn ut integralet:

$$\int \sqrt{1 + t^2} dt$$

d) Finn buelengden av parabelen:

$$y = \frac{1}{2}x^2$$

for $x \in [-1, 1]$.