Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under Midtsemesterprøve:
Førsteamanuensis Per Hag, tlf. 91743

MIDTSEMESTERPRØVE I MA1102 GRUNNKURS I ANALYSE II

Bokmål
Torsdag 26. februar 2004
Tid 08.00 - 10.00

Hjelpemidler: Godkjent kalkulator (HP30S).

Oppgave 1

Skisser kurven gitt ved parameterframstilling:

$$x = 2 - t, \qquad y = t + 1 \ ; \qquad 0 \leq t < \infty$$

og angi orienteringen v.h.a. piler.

(Finn først en kartesisk ligning i x og y med graf som inneholder den parametriske kurve.)

Oppgave 2

a) Finn den allmenne løsning av differensialligningen:

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

b) Bestem den spesielle løsning av differensialligningen i a) som oppfyller initialbetingelsene:

$$y(0) = 2, \ \ y'(0) = -1$$

Oppgave 3

a) Løs initialverdi-problemet:

$$y' = \frac{y}{2x} \quad ; \quad y(1) = 1$$

b) Finn den allmenne løsning av differensialligningen:

$$x^2 y' + 2xy = e^x$$

Oppgave 4

a) Identifiser og skisser kurven gitt ved:

$$x + 2y + 2y^2 = 1.$$

(Identifiser betyr: Omskriv ligningen på en form slik at du kan avgjøre om dette eksempelvis er en ellipse, en parabel, en hyperbel eller annet.)

b) Gi en kort beskrivelse av ellipsens refleksjonsegenskap. Bevis kreves ikke.

NB! Du skal regne en av følgende to oppgaver. D.v.s. at det ikke gies poeng for mer enn en om du regner på begge oppgavene.

Oppgave 5

Det oppgies at cosh og sinh er definert ved

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad , \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

a) Bevis at:

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$$

og at

$$\cosh^2 x - 1 = \sinh^2 x$$

b) Bevis at om $t = \cosh x$, så blir

$$x = \ln(t + \sqrt{t^2 - 1})$$

c) Regn ut det ubestemte integralet:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - a^2}} \quad \text{der } a \text{ er en positiv konstant.}$$

(En kan her anta at $t > a$.)

Oppgave 6

a) Det oppgies at når

$$x = f(t), \qquad y = g(t); \qquad t \in [a, b] \quad .$$

der f' og g' er kontinuerlige på $[a, b]$, så er buelengden av denne kurven gitt ved:

$$L = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\, dt$$

(Dette skal ikke bevises.) Bevis at dersom:

$$r = F(\theta)\ ; \qquad \theta \in [\alpha, \beta],$$

der F' er kontinuerlig på $[\alpha, \beta]$, er polarkoordinat-framstillingen av en kurve i planet, så er buelengden gitt ved formelen:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{F(\theta)^2 + F'(\theta)^2}\, d\theta.$$

b) Regn ut buelengden av kurven gitt ved polarkoordinat-framstillingen:

$$r = \theta^2\ ;\ 0 \le \theta \le \pi.$$