I siste forelesning så vi på differensialligningen

$$(1) \qquad y'' - 2y' + y = \frac{1}{1-x}$$

med initialbetingelser

$$(2) \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

Det er kanskje andre måter å løse denne på, men vi skal se hvor langt vi kommer med å bruke potensrekker.

"Lenger ut skal vi se på den tilsvarende homogene ligningen, så hvis du vil se på den først må du bla fremover."

For å ~~gj~~ kunne bruke potensrekker må vi gjøre følgende antagelse:

(3) Løsningen $y(x)$ er analytisk om $x=0$

Dvs. $y(x)$ kan skrives som ~~et~~ en potensrekke

$$(4) \qquad y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{som konvergerer}$$

på et intervall $(-R, R)$, $R > 0$.

Oppgaven vår blir å finne alle ~~en~~ koeffisientene a_n, $n \geq 0$.

At (4) er en løsning til differensialligningen (1) betyr at likheten i (1) er ~~oppett~~ holdt når vi ~~setter~~ inn (4).
For å sette inn (4) i ligningen gjør vi unna deriveringen først.

$$(4) \quad y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$(5) \quad \begin{cases} y'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' \overset{a}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' \\ \quad = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, n \, x^{n-1} \end{cases}$$

$$(6) \quad \begin{cases} y''(x) = (y'(x))' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, n \, x^{n-1}\right)' \\ \quad \overset{a}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \, n \, x^{n-1})' = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) x^{n-2} \end{cases}$$

~~Likh~~ Likhetene merket med a i 5 & 6 ~~a~~ følger fra theorem 19, s. 506 i boka (~~dette~~ resultatet ~~av~~ er også diskutert i notatet av Per Hag). Fra Thm 19 vet vi også at de nye rekkene i (5) & (6)

konvergerer på det samme området som rekken i (4). (Vi vet ikke hvor stort konvergensområdet er, men i (3) antok vi at det var større enn bare $x=0$, m.a.o. et intervall $(-R,R)$, $R>0$.)

Hvis vi ~~setter~~ (4), (5) og (6) inn i differensialligningen (I) får vi

$$\left(\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}\right) - 2\left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)$$

$$= \frac{1}{1-x}$$

Vi ønsker

(A) å forenkle ~~den~~ venstre side

(B) å sammenligne venstre side med en potensrekke på høyre side.

~~Fra~~

Vi registrerer at rekkene på venstre side ~~en~~ starter på forskjellig n, og ikke minst har forskjellige potenser på x. La oss fikse det siste først, og eventuelt ta oss av det første etterpå.

Vi har fremdeles

$$(4)\quad y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

La oss prøve å få x^n i rekkene til y' & y'' også. Vi gjør dette ved å endre tilsynelatende på hvor rekken starter, og justere koeffisientene tilsvarende:

$$(5*)\quad y'(x) \underset{(5)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n$$

$$(6*)\quad y''(x) \underset{(6)}{=} \sum_{n=2}^{\infty} a_n (n-1) n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+1)(n+2)x^n$$

Setter vi (4), (5*) og (6*) inn i (1) får vi nå

$$(7)\quad \left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n\right) - 2\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n\right) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= \frac{1}{1-x}$$

"Vi behøvde ikke gjøre noe med hvor rekkene startet, fordi de endte opp med å starte med $n=0$ alle sammen"

Ved å bruke theorem 18, s. 504,
(hvis du ikke er overbevist om hvorfor det som står der er sant kan det være lurt å se litt på det)
får vi, etter litt rydding (gjør dette for deg selv)

$$(8) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2(n+1)a_{n+1} + a_n\right] x^n = \frac{1}{1-x}$$

Da sier vi oss ferdige med punkt (A), la oss se på (B): sammenlign venstre side i (8) med en ~~rekke~~ potensrekke på høyre side. (Husk: målsetningen vår er å finne koeffisientene a_n i (4)).

Hvordan kan vi skrive $\frac{1}{1-x}$ som en potensrekke? Her har vi to muligheter: Vi kan gjøre det arbeidet som trengs for å finne en Taylorrekke for $\frac{1}{1-x}$ om $x=0$ (Maclaurinrekke) (dvs. derivere en del og forhåpentligvis finne et system ...), eller vi kan gjenkjenne

$\frac{1}{1-x}$ som grensen til en geometrisk rekke (9) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ for $-1<x<1$.

Hvis vi setter (9) inn for høyre side i 8, får vi

$$(10) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2(n+1)a_{n+1} + a_n\right] x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

(10) gir mening der rekkene gir mening. (9) vet vi gir mening ~~på~~ for $x \in (-1,1)$ og vi har antatt at venstre side gir mening på et intervall $(-R,R)$ som vi ennå ikke vet størrelsen på. Begge deler må være i orden, så hvis $R > 1$, så er det $(-1,1)$ som setter begrensningen, mens hvis $R<1$ er det $(-R,R)$ som gjør det.

~~Da~~ For å få likhet i (10) for alle x vi bryr oss om, må vi ha at koeffisientene foran x^n på begge side er like.

Hvorfor må jeg ha det? En måte å se ~~det~~ på er å først sette inn $x=0$. Da ser du at koeffisientene foran ~~x~~ x^0 må være like. Deretter deriverer du hver side en gang (bruk thm 19 s. 506) og sett inn $x=0$ igjen. Da får vi at koeffisientene foran x^1 må være like. Deriver en gang til osv...

Hvorfor holder dette? Hvis alle koeffisientene er like, så står det det samme på hver side

Hvis vi skal ha likhet av koeffisientene i (10) får vi (se neste side)

~~(11)~~ ~~ixxx~~

$$(11) \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} - 2(n+1)a_{n+1} + a_n = 1$$ ⑧

(alle koeffisientene på høyre side er 1...)

Dette er ligninger med 3 ukjente, så vi trenger mer informasjon for å komme igang. Men det har vi, nemlig i initialbetingelsene:

$$(2) \begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Hvis jeg setter $x = 0$ i (4) får jeg

$$y(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 0^n = a_0$$

så jeg må ha $\underline{a_0 = 1}$ (se på (2))

Hvis jeg setter $x = 0$ i (5) eller (5*)

får jeg $y'(0) = a_1$, så $\underline{a_1 = 1}$

Dermed har jeg nok informasjon til å få noe ut av (11):

Sett $n = 0$ i (11). Da får du

$$(0+2)(0+1)a_2 - 2(0+1)a_1 + a_0 = 1 \quad \text{eller}$$

$$2a_2 - 2a_1 + a_0 = 1 \text{ eller } a_2 = \frac{2a_1 - a_0 + 1}{2}$$

Setter jeg inn $a_0 = 1$ og $a_1 = 1$ får jeg $a_2 = 1$.

Jeg kan fortsette slik, og finne a_3, deretter a_4, osv. Hvis jeg skriver (11) som

$$(11*) \quad a_{n+2} = \frac{1 - a_n + 2(n+1)\,a_{n+1}}{(n+2)(n+1)}$$

blir det kanskje enda tydeligere at det holder å finne de to forrige, a_{n+1} og a_n, for å finne a_{n+2}.

Vi kan holde på med ~~dette~~ så lenge vi orker, og hvis jeg regnet riktig, så får vi (sjekk selv)

$$a_0 = 1$$
$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 1$$
$$a_3 = \frac{2}{3}$$
$$a_4 = \frac{1}{3}$$
$$a_5 = \frac{3}{20}$$
$$a_6 = \frac{13}{180}$$
$$a_7 = \frac{103}{2520}$$

Dette er andre tall enn på forelesningen, men sjekk selv.

La oss oppsummere hva vi har funnet ut:

<u>Hvis</u> løsningen er analytisk,

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, så vet vi at

løsningen må se ut som

$$y(x) = 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{3}{20}x^5 + \frac{13}{180}x^6 + \frac{103}{2520}x^7 + a_8 x^8 + a_9 x^9 + a_{10} x^{10} + \cdots\cdots$$

og
$$a_{n+2} = \frac{1 - a_n + 2(n+1)a_{n+1}}{(n+2)(n+1)} \qquad (11*)$$

Kanskje noen av dere kan finne et system slik at vi kan uttrykke a_n bare med n, uten å referere til a_{n-1} og a_{n-2}, ~~...~~ jeg har ikke sett et slikt system ennå. Men det betyr ikke at vi er fortapt.

Vi har funnet ~~...~~ (forutsatt at analytisk ...) at $y(x) = s_7(x) + t_7(x)$ der

$$s_7(x) = 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{3}{20}x^5 + \frac{13}{180}x^6 + \frac{103}{2520}x^7$$

og

$$t_7(x) = \sum_{n=8}^{\infty} a_n x^n = a_8 x^8 + a_9 x^9 + \cdots\cdots$$

Hvis vi kan garantere at

a) $t_7(x)$ konvergerer, og i såfall at

b) $t_7(x)$ er liten,

så vet vi at

a*) løsningen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = y(x)$ er analytisk, så alt vi har gjort (som bygger på antagelsen om analytisk løsning) er riktig og

b*) $y(x) \approx s_7(x)$.

La oss se på a) & b) samtidig:

vi er enige om at vi ikke orker å regne ut flere av a_n-ene, men kan vi likevel si noe om dem?

Det ser ut som de blir mindre og mindre, og i hvertfall alle tilfredsstiller $|a_n| \leq 1$. (Jeg håper det kommer frem om litt hvorfor jeg møyer meg med dette.)

La oss se om dette er sant.

Vi har

$$(11*) \qquad a_{n+2} = \frac{1 - a_n + 2(n+1)a_{n+1}}{(n+2)(n+1)}$$

La oss antar at for en gitt n, er

$$(12) \quad \begin{cases} |a_n| \leq 1 \\ |a_{n+1}| \leq 1 \end{cases}$$

Da har jeg

$$|a_{n+2}| = \frac{|1 - a_n + 2(n+1)a_{n+1}|}{(n+2)(n+1)}$$

$$\leq \frac{|1| + |-a_n| + |2(n+1)a_{n+1}|}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{1 + |a_n| + 2(n+1)|a_{n+1}|}{(n+2)(n+1)}$$

$$\underset{(12)}{\leq} \frac{1+1+2(n+1)}{(n+2)(n+1)} = \cancel{4}\frac{2\cancel{(n+2)}}{\cancel{(n+2)}(n+1)}$$

$$= \frac{2}{n+1} \underset{\text{Hvis } n \geq 1}{\leq} 1$$

Ved induksjon får vi dermed at $|a_n| \leq 1$ for alle $n \geq 0$ (det mangler litt på detaljene her, fyll ut!)

La oss se om vi kan bruke dette til å si noe om hvor stor $t_7(x)$ er:

$$(13)\quad \begin{cases} |t_7(x)| = \left|\sum_{n=8}^{\infty} a_n x^n\right| \leq \sum_{n=8}^{\infty} |a_n x^n| \\ = \sum_{n=8}^{\infty} |a_n|\,|x|^n \leq \sum_{n=8}^{\infty} |x|^n \end{cases}$$

Bruk $|a_n| \leq 1$.
Sjekk at du er sikker på at det medfører at denne ulikheten er sann

Den siste rekken er en geometrisk rekke, og vi vet den konvergerer for alle $x \in (-1,1)$

~~Dette medfører at $\Sigma a_n x^n$ er absolutt konvergent~~

Dette medfører at $\Sigma a_n x^n$ garantert er absolutt konvergent for $x \in (-1,1)$, (og dermed konvergent).

For alt vi vet kan det være at $\Sigma a_n x^n$ ~~har~~ konvergerer på et større intervall enn $(-1,1)$, men det er ikke så relevant, for ~~[illegible]~~ det vi har gjort har kun mening på $(-1,1)$.
(Husker du hvorfor? Se på side 6.

Dermed vet vi at det finnes en analytisk løsning til (1) & (2) på $(-1,1)$, og vi vet at $s_7(x)$ er ~~...~~ Taylorpolynomet av grad 7 om $x=0$ til denne løsningen.

Vi kan bruke (13) til å si noe om hvor god tilnærming $s_7(x)$ er også:

$$(13) \quad |t_7(x)| \leq \sum_{n=8}^{\infty} |x|^n$$

Høyre siden kan vi enten skrive som

$$\frac{1}{1-|x|} - |x|^0 - |x|^1 - |x|^2 - \dots - |x|^7$$

(hvorfor) eller vi kan etterligne beviset for:

$$\left(|x|^8 + |x|^9 + \dots + |x|^N\right)\left(1-|x|\right) = |x|^8 - |x|^{N+1}$$

så

$$|x|^8 + |x|^9 + \dots + |x|^N = \frac{|x|^8 - |x|^{N+1}}{1-|x|}$$

Når N går mot uendelig vil venstre side konvergere mot $t_7(x)$, og hvis $|x|<1$ så vil $|x|^{N+1}$ konvergere mot null, så høyre side vil konvergere mot $\frac{|x|^8}{1-|x|}$.

Dermed vet vi at

$$|t_7(x)| \leq \frac{|x|^8}{1-|x|}$$

så

$$|y(x) - s_7(x)| \leq \frac{|x|^8}{1-|x|}$$

der $y(x)$ er løsningen vi nå vet finnes.

Hvis x er nær null, ser vi at s_7 er en god tilnærming, mens i nærheten av -1 og 1 vet vi mindre. For eksempel fikk jeg, hvis jeg slo riktig på kalkulatoren

$$s_7(\tfrac{1}{2}) \approx 1,8603$$

$$t_7(\tfrac{1}{2}) \approx 0,0078$$

så vi kan ~~[illegible]~~ for eksempel konkludere at

$$1,85 < y(\tfrac{1}{2}) < 1,87$$

Da sier jeg meg ferdig med denne ligningen. Hvis du er sikker på alt som står her, og ikke bare forstår det på overflaten, så kan du være sikker på at du har oversikt over det meste i kapittel 9.8

Noen ting du kan prøve deg på

a) Fyll ut detaljene der du er usikker

b) Finn et estimat for $y\left(\frac{3}{4}\right)$ med feilmargin mindre enn $\frac{1}{100}$

c) Prøv deg på $y''-2y'+y=\tan x$. Velg initialbetingelser selv. Hint: Bruk Taylorrekken til $\tan x$ om 0.

Her er en lettere variant, nemlig den tilsvarende homogene ligningen

(14) $$y''-2y'+y=0$$

Denne kan vi gjøre slik dere lærte i høst, men her er en løsning med rekker.

La oss ta initialbetingelsene

(15) $y(0)=0$
$y'(0)=1$

Vi antar igjen at løsningen er analytisk om $x=0$, og bruker derfor (4), (5*) og (6*) som gir (14) på formen

$$(16)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}-2(n+1)a_{n+1}+a_n\right]x^n = 0 \left(=\sum 0x^n\right)$$

(sammenlign med (8) eller (10).

Dermed vet vi at vi må ha

$$(17)\quad (n+2)(n+1)a_{n+2}-2(n+1)a_{n+1}+a_n = 0$$

På samme måten som (2) ga oss a_0 & a_1 sist (side 8) får vi fra 15 at vi nå må ha

$a_0=0$
$a_1=1$

Vi bruker nå (17) og får, (som på s. 8&9)

$a_2=1$
$a_3=\frac{1}{2}$
$a_4=\frac{1}{6}$
$a_5=\frac{1}{24}$

Det slår meg at

$$a_1 = 0! = \frac{1}{0!}$$
$$a_2 = 1! = \frac{1}{1!}$$
$$a_3 = \frac{1}{2!}$$
$$a_4 = \frac{1}{3!}$$
$$a_5 = \frac{1}{4!}$$

så jeg vil sjekke om det er tilfellet at

$$a_n = \frac{1}{(n-1)!} \quad \text{for alle} \quad n \geq 1.$$

Fra (17) får jeg

$$(18) \qquad a_{n+2} = \frac{2(n+1)a_{n+1} - a_n}{(n+2)(n+1)}$$

eller tilsvarende

$$(18^*) \qquad a_n = \frac{2(n-1)a_{n-1} - a_{n-2}}{n(n-1)}.$$

Anta at for en gitt n så har vi

$$a_k = \frac{1}{(k-1)!} \qquad \text{for alle} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

da har vi spesielt at

$$(19) \quad \begin{cases} a_{n-1} = \dfrac{1}{(n-2)!} \\ a_{n-2} = \dfrac{1}{(n-3)!} \end{cases}$$

Sette vi (19) inn i (8*) får vi

$$a_n = \frac{2(n-1)\dfrac{1}{(n-2)!} - \dfrac{1}{(n-3)!}}{n(n-1)}$$

$$= \frac{\dfrac{2(n-1)}{(n-2)!} - \dfrac{(n-2)}{(n-2)!}}{n(n-1)} = \frac{2(n-1)-(n-2)}{n(n-1)!}$$

$$= \frac{2n-2-n+2}{n(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!}$$

så antagelsen medfører at formelen gjelder for n også. Dermed gir generelle induksjonsprinsippet oss at vi har

$$a_0 = 0$$
$$a_n = \frac{1}{(n-1)!} \quad \text{for alle } n \geq 1$$

Altså ~~my~~ må vi ha

$$(20) \qquad y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^n$$

Sjekk selv at denne konvergerer i et ~~~~ intervall om $x=0$, finn gjerne hele konvergensintervallet! :)

(20) ligner veldig på noe jeg kjenner igjen, nemlig $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, men ikke helt. La oss se hva vi kan få ut av det:

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} x$$

$$= x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \underline{\underline{x e^x}}$$

La oss for syns skyld sjekke at dette e løsningen vi skal ha. Vi må sjekke både (14) og (15):

$$y(0) = 0 \cdot e^0 = 0 \cdot 1 = 0 \quad \text{ok.}$$

$$y'(x) = e^x + x e^x = (1+x) e^x$$

$$y'(0) = e^0 + 0 e^0 = 1 \quad \text{ok.}$$

$$y''(x) = e^x + e^x + x e^x = 2e^x + x e^x = (2+x) e^x$$

Sett y, y' og y'' inn i (14):

$$y'' - 2y' + y = (2+x)e^x - 2(1+x)e^x + x e^x$$

$$= 2e^x + x e^x - 2e^x - 2x e^x + x e^x = 0$$

ok.

La oss avslutte denne ligningen med å gjøre det slik dere gjorde det i høst:

til (14) $y'' - 2y' + y = 0$ kan vi assosiere den karakteristiske ligningen

$$(21) \quad r^2 - 2r + 1 = 0$$

eller

$$(21*) \quad (r-1)^2 = 0$$

Vi ser av (21*) at det er en dobbelt rot for $r = 1$.

Dermed vet vi at ~~y~~ løsningen må være ~~på~~ formen ~~y~~

$$y(x) = Ae^x + B\cancel{}xe^x$$

Så bruker vi (15)

$$y(0) = Ae^0 + B \cdot 0 \cdot e^0 = A = 0$$

$$y'(0) = Ae^0 + Be^0 + B \cdot 0 \cdot e^0 = B = 1$$

så $y(x) = xe^x$ er løsningen.

F ~~[illegible]~~

~~Klarer du nå oppgaven å finne en tilsvarende løsning til $y'' - y$~~

Klarer du nå raskt å finne en tilnærmet verdi for $y(\frac{1}{2})$, der y er løsningen til initialverdi-problemet

$$y'' - 2y' + y = \frac{1}{1-x}$$

$$y(0) = 3$$

$$y'(0) = -2$$

?