Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Heidi Dahl
Telefon: 916 95 300

Eksamen i fag MA1103 Flerdimensjonal analyse

Bokmål
Tirsdag 19. Desember 2006
Kl. 09.00-13.00

Hjelpemiddel: Kalkulator HP30S
Alle svar skal begrunnes. Lykke til!

Sensur faller 09.01.2007.

Oppgave 1
Avgjør om følgende grenseverdier eksisterer:

(i)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\cos(x^2+y^2)}{x+y}$$

(ii)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Oppgave 2

La $f(x,y,z) = x + 2y - 3z$. Finn maksimal- og minimalverdien til f på området $x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq 108$.

Oppgave 3

Et område R i rommet er avgrenset av flatene $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z = x^2 + y^2$, $z = 0$ og $z = 1$.

a) Tegn en skisse av R.

b) Beregn volumet til området R.

c) Delen av overflaten til R hvor $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, er dekket av et fint stjernestøv etter tetthetsfunskjonen $f(x, y, z) = z$ (milligram pr. arealenhet). Regn ut den totale mengden stjernestøv på denne overflatebiten.

Oppgave 4

a) Formuler Stokes teorem.

b) Verifiser Stokes teorem for halvkuleflaten $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ og vektorfeltet $\mathbf{F} = [x, y, z]$.

Oppgave 5

For alle vektorfelt $\mathbf{F}$ med kontinuerlige partiellderiverte av annen orden gjelder $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$.
La $\mathbf{G} = (y - x)\hat{\mathbf{i}} + x^2\hat{\mathbf{j}} + (z - 2y)\hat{\mathbf{k}}$.
Vis at $\nabla \cdot \mathbf{G} = 0$ og finn et vektorpotensiale $\mathbf{F}$ for $\mathbf{G}$ slik at $\mathbf{G} = \nabla \times \mathbf{F}$.