Faglig kontakt under eksamen: John Erik Fornæss
(984-46-505)

Dato: Lørdag 9. Juni, 2012
Tid: 09.00 - 13:00
Hjelpemidler: Godkjent kalkulator.
Vedlagt Formelark og Formelliste
Bokml
Sensur: 2. juli 2012

hver oppgave 10 poeng

Oppgave 1

Finn en parameterfremstilling for den rette linja gjennom $P(1,2,3)$ parallell med vektoren $<2,1,-1>$.

$$\begin{aligned}
x(t) &= 1+2t \\
y(t) &= 2+t \\
z(t) &= 3-t
\end{aligned}$$

Oppgave 2

Finn den retningsderiverte av funksjonen $f(x,y,z) = e^{-x^2}y - \ln(1+e^z)$ i punktet $(1,1,0)$ i retningen fra $(1,1,0)$ til $(-1,2,1)$.

$$\begin{aligned}
\nabla f &= < -2xe^{-x^2}y, e^{-x^2}, -\frac{e^z}{1+e^z} > \\
&= < -2e^{-1}, e^{-1}, -\frac{1}{2} > \\
v &= < -2, 1, 1 > \\
u &= \frac{1}{\sqrt{6}} < -2, 1, 1 > \\
\nabla f \cdot u &= \frac{1}{\sqrt{6}}(4e^{-1} + e^{-1} - \frac{1}{2}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}(5e^{-1} - \frac{1}{2})
\end{aligned}$$

Oppgave 3

Finn maximumsverdien av funksjonen $f(x,y) = 2x + y - x^2 - 2y^2 + 3$

$$\begin{aligned}
f_x &= 2-2x \\
f_y &= 1-4y
\end{aligned}$$

Kritisk Punkt $(x,y) = (1, 1/4)$

$$\begin{aligned} f_{xx} &= -2 \\ f_{yy} &= -4 \\ f_{xy} &= 0 \\ D &= 8 > 0 \end{aligned}$$

$(1, 1/4)$ er maks punkt. Maks verdi er $2+1/4-1-1/8+3 = (16+2-8-1+24)/8 = 33/8 = 4+1/8$

Oppgave 4

Vi sier at $f(x, y)$ er harmonisk hvis f er to ganger kontinuerlig deriverbar og $f_{xx} + f_{yy} = 0$. Vis at hvis g er harmonisk så er også $f(x, y) = g(x^2 - y^2, 2xy)$ harmonisk.

$$\begin{aligned} f_x &= g_1 2x + g_2 2y \\ f_x x &= g_{11} 4x^2 + g_{12} 4xy + 2g_1 + g_{21} 4xy + g_{22} 4y^2 \\ f_y &= g_1(-2y) + g_2 2x \\ f_{yy} &= g_{11} 4y^2 + g_{12}(-4xy) - 2g_1 + g_{21} 4x^2 + g_{22} 4x^2 \\ f_{xx} + f_{yy} &= (g_{11} + g_{22})(4x^2 + 4y^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Vi ser av formlene at f er to ganger kontinuerlig deriverbar.

Oppgave 5

Finn fluksen av vektorfeltet $\vec{F}(x, y, z) =< \sin^2(y), y, xz >$ inn i enhetskula med sentrum i origo.

$$DivF = 1 + x$$

Volumintegralet blir $\frac{4\pi}{3}$. Svaret blir $-\frac{4\pi}{3}$ siden vi skal ha fluks innover.

Oppgave 6

Finn minimumsverdien av $f(x, y) = xy$ på ellipsen $g(x, y) = x^2 + 2y^2 = 1$.

$$\begin{aligned} \nabla f &= \nabla g \\ g &= 1 \\ < y, x > &= \lambda < 2x, 4y > \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 2\lambda x \\ x &= 4\lambda y \\ x^2 + 2y^2 &= 1 \end{aligned}$$

$\lambda, x, y \neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{y}{2x} &= \frac{x}{4y} \\ x^2 &= 2y^2 \\ x^2 &= \frac{1}{2} \\ y^2 &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$(x,y) = (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2}$
Min av xy er $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Oppgave 7
Finn arbeidet utført av kraften $F(x,y,z) =< yz, xz, xy >$ på en partikkel som beveger seg på kurven $\vec{r}(t) =< e^t, \sin t, t^3 >$ i tidsintervallet $t \in [0,1]$.
$F = \nabla(xyz)$.
Endpoints: $t = 0 :< 1, 0, 0 >, t = 1 :< e, \sin 1, 1 >$ Integral is then

$$e \sin 1 - 0 = e \sin 1$$

Oppgave 8
Finn integralet $\int\int_D (x^2+y^2)^7 dxdy$ hvor D er sirkelen $x^2+y^2 \leq 4$.

$$\begin{aligned} \int\int_D (x^2+y^2)^7 dxdy &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^{15} dr d\theta \\ &= 2\pi \frac{r^{16}}{16}|_{r=0}^{r=2} \\ &= 2\pi \frac{2^{16}}{2^4} \\ &= 2^{13}\pi \\ &= 8192\pi \end{aligned}$$

Oppgave 9
Finn integralet $\int_C (e^{x^2}+y)dx + (2x - e^{y^2})dy$ langs sirkelen $x^2+y^2 = 4$. Spesifiser om du regner ut integralet med eller mot klokken.
Vi regner ut mot klokken, og bruker Green:

$$\int\int (2-1) dxdy = 4\pi$$

Oppgave 10

La S være halvkula $x^2+y^2+z^2=4$ med $z \leq 0$ orientert nedover. La $\vec{F} =< x\tan(z/4), xe^{e^{z^4}}, xyz >$.
Finn integralet $\int\int_S \mathrm{curl}\vec{F} \cdot d\vec{S}$.
Randa er sirkelen $z=0, x^2+y^2=4$ orientert med klokka.
$x = 2\cos t, y = -2\sin t$
$F(2\cos t, -2\sin t, 0) =< 0, 2e\cos t, 0 >$
Stokes gir at integralet blir

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} < 0, 2e\cos t, 0 > \cdot < -2\sin t, -2\cos t, 0 > dt &= \int_0^{2\pi} -4e\cos^2 t dt \\ &= -4\pi e\end{aligned}$$