MA1103 Flerdimensjonal analyse
våren 2012

Maple/Matlab-øving 2

Fyll inn studieprogram:

Fyll inn navn:

1.

2.

3.

4.

Viktig informasjon

Besvarelsen kan leveres som gruppearbeid med *maksimalt* 4 personer i en gruppe. Alle deltagerne på gruppen må komme fra *samme studieprogram*. Det er viktig at alle deltagerne fører på navnet sitt over. Skriv tydelig.

Besvarelsen som skal leveres, består av to deler:

- ***Oppgavearkene, med utfylte svar der hvor det er angitt.***
- ***Utskrifter av utvalgte plot laget i Maple/Matlab.***

Det angis i oppgaveteksten hvilke plot som skal legges ved. Plottene må merkes tydelig ved å skrive på oppgavenummer. (For eksempel merkes plottet til oppgave 1(a) med «1(a)».) Det er lov å legge ved ekstra svarark hvis du trenger mer plass.

NB! Alle arkene må stiftes sammen til slutt!

1 ***Hensikt:*** Få trening i å skrive dobbeltintegraler både i kartesiske koordinater og i polarkoordinater. Bruke Maple/Matlab til å regne ut integralene (eksakt for Maple, numerisk for Matlab) og til å skissere området det integreres over, samt det legemet som dobbeltintegralet gir volumet til.

Maplekommandoer: `plot, plot3d, int`
Matlabkommandoer: `plot, fill, quad2d, quad`

Sett
$$f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
og la R være det plane området som ligger til høyre for y-aksen, over linjen $y = x/3+2$ og under kurven $y = 3+\sqrt{9-x^2}$.

Vi skal regne ut dobbeltintegralet
$$\iint_R f(x,y)\,dA =,$$
først ved hjelp av x, y-koordinater, så ved å skrive det om til polarkoordinater $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

Merk: En del punkter er greiest å regne for hånd (altså uten å bruke Maple/Matlab).

a) Vis at kurven $y = 3+\sqrt{9-x^2}$ (for $|x| \le 3$) er en del av en sirkel. Skriv ligningen for denne sirkelen på standardformen $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = c^2$, der (x_0, y_0) er sirkelens sentrum og c er dens radius:

b) Finn det punktet i 1. kvadrant der kurven $y = 3+\sqrt{9-x^2}$ skjærer linjen $y = x/3+2$:

c) Bruk Maple/Matlab til å tegne området R (dvs. tegn randen som avgrenser R). Legg ved utskrift av plottet.

d) Skriv $\iint_R f(x,y)\,dA$ som et iterert dobbeltintegral på formen $\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$:

e) Prøv å regne ut integralet fra forrige punkt med Maple/Matlab.[1] (Hint for Maple: *int*. Hint for Matlab: *quad2d*).

$\iint_R f(x,y)\,dA \approx$

[1] Det viser seg da at Maple ikke greier å regne det ut eksakt (hvis Maple greier det, har du satt opp feil integral). Du kan likevel bruke kommandoen `evalf` på integralet, for å finne en numerisk tilnærming.

f) Finn uttrykket for sirkelen fra punkt (a) i polarkoordinater, dvs. beskriv den med en ligning på formen $r = h_2(\theta)$:

g) Finn uttrykket for linjen $y = x/3 + 2$ i polarkoordinater, dvs. beskriv den med en ligning på formen $r = h_1(\theta)$:

h) Beskriv området R i polarkoordinater. Svaret skal gis på formen $\alpha \le \theta \le \beta$, $h_1(\theta) \le r \le h_2(\theta)$:

i) Uttrykk $\iint_R f(x, y)\, dA$ i polarkoordinater:

$\iint_R f(x, y)\, dA =$

Kun for Maple: Bruk Maple til å regne ut dette integralet (Maple skal nå gi et eksakt svar, men siden uttrykket er langt, trenger du ikke skrive det ut her). (Merk: Du kan bruke `evalf` til å sjekke at svaret stemmer med det du fant i punkt (e).)

j) Dobbeltintegralet $\iint_R f(x, y)\, dA$ er volumet av det romlige legemet som ligger over området R i xy-planet og under grafen $z = f(x, y)$. Bruk Maple/Matlab til å tegne dette legemet. (Eksempelfilen viser hvordan dette gjøres.) Legg ved utskrift av tegningen, merket med 1(j).

2 ***Hensikt:*** Få trening i å sette opp trippelintegraler i xyz-koordinater. Bruke Maple/Matlab til å regne ut integraler og til å skissere området det integreres over.

Maplekommandoer: `plot3d, int`
Matlabkommandoer: `surf, triplequad, dblquad`

La T være legemet i 1. oktant avgrenset av planene $x = 0$, $y = x$ og $z - x = 0$, og av de parabolske sylindrene $x^2 + y = 2$ og $y^2 + z = 6$.

a) Skriv $\iiint_T F(x, y, z)\, dV$ som et iterert trippelintegral på formen

$$\int_a^b \int_{h(x)}^{k(x)} \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} F(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

b) Bruk Maple/Matlab til å tegne området T. Legg ved utskrift av plottet. (Hint til Maple: `plot3d`. Hint til Matlab: `surf`)

c) Anta at legemet har massetetthet $\delta = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$. Regn ut numeriske approksimasjoner til følgende størrelser ved hjelp av Maple/Matlab (og svaret på punkt (a)). Maple: Se `int` og `evalf`. Matlab: Se `dblquad`.

$Mass \approx$

$M_{y,z} \approx$

$M_{z,x} \approx$

$M_{x,y} \approx$

d) Finn tyngdepunktet (sentroiden) til T:

$\overline{x_T} \approx$

$\overline{y_T} \approx$

$\overline{z_T} \approx$

3 ***Hensikt:*** Sette opp trippelintegraler i kulekoordinater. Bruke Maple/Matlab til å regne ut integraler og til å skissere området det integreres over.

Maplekommandoer: `plot3d, int`
Matlabkommandoer: `surf, triplequad`

La T være legemet i 1. oktant som er

- avgrenset av koordinatplanene,
- ligger innenfor kuleflaten S_1 med radius 3 og sentrum i origo, og
- ligger utenfor kuleflaten S_2 med radius 2 og sentrum på z-aksen i punktet $z = 1$.

a) Skriv ligningen for S_1 i kulekoordinater, på formen $\rho = f(\theta, \phi)$.

$\rho =$

b) Skriv ligningen for S_2 i kulekoordinater, på formen $\rho = f(\theta, \phi)$. (Hint: Skriv først opp ligningen for S_2 i xyz-koordinater. Da skal det kunne gå an å forkorte med ρ)

$\rho =$

c) Beskriv T i kulekoordinater, på formen $a \le \theta \le b$, $c \le \phi \le d$, $f(\theta, \phi) \le \rho \le g(\theta, \phi)$.

d) Anta at legemet har massetetthet $\delta = 1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1 + \rho$. Uttrykk massen M av T som et iterert trippelintegral på formen

$$\int_a^b \int_c^d \int_{f(\theta,\phi)}^{g(\theta,\phi)} \delta \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta,$$

og bruk Maple til å regne ut massen. Matlab-folkene finner et tilnærmet numerisk uttrykk.

$Mass =$

e) Bruk Maple/Matlab til å tegne området T. (Se eksempelfilen knyttet til denne oppgaven.) Legg ved utskrift av plottet, merket med 3(e).

4 ***Hensikt:*** Bruke Maple/Matlab til å regne ut arbeidet gjort av et vektorfelt langs en kurve i planet, og til å visualisere.

Maplekommandoer: `VectorField, PlotVector, SpaceCurve, diff,DotProduct, evalVF, int, Norm`
Matlabkommandoer: `quiver3, surf, quad`

Vi ser på vektorfeltet

$$\mathbf{F} = y\,\mathbf{i} - x^2\,\mathbf{j} + (1-z)\,\mathbf{k}$$

og romkurven C parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (2\cos t)\mathbf{i} + (2\sin t)\mathbf{j} + (2\cos 2t)\mathbf{k}, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

a) Bruk Maple/Matlab til å plotte vektorfeltet og kurven hver for seg og sammen.

b) Bruk Maple/Matlab til å regne ut arbeidet $W = \int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$:

$W =$

c) Bruk Maple til å regne ut lengden av kurven C Dette er en ikkeelementær funksjon, en elliptisk funksjon, men Maple klarer å håndtere denne. Det kan lønne seg å kjøre kommandoen “combine” på uttrykket for farten, og integrere dette uttrykket. Da sparer du et par minutters arbeidstid for Maple. Bruk `evalf` på uttrykket for å finne et tilnærmet svar. Matlab-folk beregner kun det tilnærmede svaret numerisk (`quad`).

Lengden av $C \approx$

(Ekstra plass til å skrive på, om nødvendig.)