Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Fagleg kontakt under eksamen: Heidi Dahl
Telefon: 7359 3464, mobil: 916 95 300

Eksamen i fag MA1103 Fleirdimensjonal analyse

Nynorsk
Laurdag 20. mai 2006
Kl. 09.00-13.00

Hjelpemiddel: Kalkulator HP30S
Alle svara skal grunngjevast. Lykke til!

Sensur fell 10.06.2006.

Oppgåve 1

La $f(x, y) = (4 - x^2 - y^2)e^{x+y}$.

a) Finn eventuelle kritiske punkt for f.

b) Klassifiser eventuelle kritiske punkt for f.

c) Anta at f gjev temperaturen i eit punkt i planet. I kva for retning ut frå punktet $(0, 0)$ aukar temperaturen mest? Kor stor er temperaturendringa ut frå origo langs lina $y = 2x$?

Oppgåve 2

Rekn ut integralet

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dA,$$

der D er disken $x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$.

Oppgåve 3

Eit område R i rommet er avgrensa av flatene $z = y^2$, $z = 2 - y$, $x = 0$ og $x = 2$.

a) Teikn ei skisse av området R og rekn ut volumet av R.

b) La $\mathbf{F} = [0, 2y - xy, xz]$ vere eit vektorfelt.
Rekn ut fluksen av $\mathbf{F}$ ut gjennom overflata til R direkte; dvs rekn ut flateintegralet

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{N}\, dS,$$

der S er overflata til R, med einingsnormal $\hat{N}$ pekande ut av R.

c) Kontroller svaret i b) ved å gjere bruk av divergensteormet (Gauss' teorem).

Oppgåve 4

Ein sirkel i xy-planet med radius 1 rullar langs x-aksen. Eit punkt festa på sirkelranda vil då følgje ei kurve C som kan parametriserast ved:

$$\mathbf{r}(t) : \begin{cases} x &= t - \sin t \\ y &= 1 - \cos t \\ z &= 0 \end{cases}, \quad -\infty < t < \infty.$$

a) Finn lengda av C når $t \in [0, 2\pi]$
(Du kan få bruk for at $\frac{1-\cos t}{2} = \sin^2 \frac{t}{2}$.)

b) Bruk Greens teorem til å finne arealet av området avgrensa av x-aksen og kurva C når $t \in [0, 2\pi]$.

c) La C vere ei generell kurve, og la $\mathbf{r}_1(t)$ og $\mathbf{r}_2(u)$ vere to parametriseringer av C, for $a \le t \le b$ og $c \le u \le d$. Anta at både $\mathbf{r}_1$ og $\mathbf{r}_2$ er ein-til-ein, og at $\mathbf{r}_1(a) = \mathbf{r}_2(c)$ og $\mathbf{r}_1(b) = \mathbf{r}_2(d)$ (dei går i same retning). Då finst det til kvar $t \in [a, b]$ ein unik $u = u(t) \in [c, d]$ slik at $\mathbf{r}_2(u(t)) = \mathbf{r}_1(t)$. Vis at

$$\int_a^b |\frac{d}{dt}\mathbf{r}_1(t)|\, dt = \int_c^d |\frac{d}{du}\mathbf{r}_2(u)|\, du,$$

det vil si at lengda av C er uavhengig av parametriseringa.