**Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag**

Løsningsforslag, eksamen MA1103 Flerdimensjonal analyse, vår 2009

Oppgave 1

Avgjør om grenseverdiene eksisterer:

(i)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\left(\frac{x^2+y^2+x^2y}{x^2+y^2}\right)}$$

(ii)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^2y}{x^4+y^2}$$

Løsningsforslag:

(i) Vi forsøker med polarkoordinater: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, og ser hva som skjer når $r \to 0$:

$$\lim_{(x,y)\to((0,0)} e^{\left(\frac{x^2+y^2+x^2y}{x^2+y^2}\right)} = \lim_{r\to 0} e^{\left(\frac{r^2+r^3\cos\theta\sin\theta}{r^2}\right)} = \lim_{r\to 0} e^{(1+r\cos\theta\sin\theta)} = e^{(1+0)} = e$$

Her har vi brukt at både $\cos\theta$ og $\sin\theta$ er begrensede funksjoner for å kunne konkludere at $r\cos\theta\sin\theta$ går mot 0 når r går mot 0, slik at grensen er uavhengig av vinkelen θ.

(ii) Vi undersøker hva som skjer med utrykket langs noen (forholdsvis) enkle veier inn mot origo:

$$x = 0 : \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{4\cdot 0^2\cdot y}{0^4+y^2} = 0$$

$$y = x : \lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{4x^3}{x^4+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{4x}{x^2+1} = 0$$

$$y = x^2 : \lim_{(x,x^2)\to(0,0)} \frac{4x^4}{x^4+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{4}{2} = 2$$

Siden vi får ulik verdi for ulike veier inn mot origo, konkluderer vi med at grenseverdien ikke eksisterer.

Kommentar: I (i) bør det nevnes at $\cos\theta$ og $\sin\theta$ er begrensede funksjoner.
Dersom en ikke ønsker å bruke polarkoordinater i denne oppgaven, men heller definisjonen av grenseverdi, anbefales det å se på grenseverdien av eksponentutrykket, og argumentere med at eksponentialfunskjonen er kontinuerlig når konklusjonen skal trekkes.

Oppgave 2

La $\mathcal{D}$ være området i xy-planet avgrenset av kurven $(x-2)^2+y^2=4$. Tegn området $\mathcal{D}$ og beregn dobbeltintegralet $\iint_{\mathcal{D}} \sqrt{x^2+y^2}\,dA$.

Løsningsforslag: Kurven $(x-2)^2+y^2=4$ er en sirkel med sentrum i $(2,0)$ og radius 2. Integranden $\sqrt{x^2+y^2}$ tar seg godt ut i (vanlige) polarkoordinater $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, siden dette variabelskiftet gir $\sqrt{x^2+y^2}=r$. Vi forsøker å beskrive disken $\mathcal{D}$ ved hjelp av de samme polarkoordinatene:

$$\begin{aligned}
(x-2)^2+y^2 &\le 4\\
x^2-4x+4+y^2 &\le 4\\
r^2\cos^2\theta-4r\cos\theta+4+r^2\sin^2\theta &\le 4\\
r^2 &\le 4r\cos\theta\\
r &\le 4\cos\theta
\end{aligned}$$

Dermed blir integrasjonsgrensene våre (se figur) $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ og $0\le r\le 4\cos\theta$. Dessuten må vi huske Jacobideterminanten; $dA=r\,dr\,d\theta$.

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{D}} \sqrt{x^2+y^2}\,dA &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{4\cos\theta} r^2\,dr\,d\theta = \frac{4^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,d\theta = \frac{4^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta\\
&= \frac{4^3}{3}[\sin\theta-\tfrac{1}{3}\sin^3\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4^4}{3^2}
\end{aligned}.$$

Kommentar: Siden integranden $\sqrt{x^2+y^2}$ ikke er uavhengig av integrasjonsområdet, kan vi ikke velge å integrere over en disk sentrert i origo i stedet for den oppgitte disken. Vi *kan* velge å flytte sentrum i det polare kooridinatsystemet vårt (ved å velge $x=r\cos\theta+2$, $y=r\sin\theta$), men dette gir oss en vanskelig integrand.

Oppgave 3

Temperaturen i et punkt i xy-planet er gitt ved $T(x,y) = 6xy^2 - 2x^3 - 3y^4 + 16$ (målt i ^oC).

a) Finn alle kritiske punkt for funksjonen T.

Løsningsforslag: Kritiske punkt finnes der gradienten er null:

Gradienten er $\nabla T(x,y) = [\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}] = [6y^2 - 6x^2, 12xy - 12y^3]$. Dette gir oss to likninger, to ukjente:

$$(1) \qquad 6y^2 - 6x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm y$$

$$(2) \qquad 12xy - 12y^2 = 0$$

$$\begin{array}{lrcl} x = y: & 12y^2 - 12y^3 = 0 & \Rightarrow & y = 0 \vee y = 1 \\ x = -y: & -12y^2 - 12y^3 = 0 & \Rightarrow & y = 0 \vee y = -1 \end{array}$$

De kritiske punktene er dermed $(0,0)$; $(1,1)$ og $(1,-1)$.

Kommentar: Pass på å ha med nok mellomregninger til at det kommer klart frem hvordan du har funnet de kritiske punktene, og hvordan du kan være sikker på at det ikke finnes flere.

b) Klassifiser alle kritiske punkt for funksjonen T.

Løsningsforslag: De fleste kritiske punkt kan klassifiseres ved hjelp av Hessianmatrisa, som består av de dobbeltderiverte (innsatt det kritiske punktet).

$$\mathcal{H}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12x & 12y \\ 12y & 12x - 36y^2 \end{bmatrix}$$

Vi sjekker for våre kritiske punkt:

$$\mathcal{H}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \det\mathcal{H} = 0 \Rightarrow \text{ testen gir ingen konklusjon.}$$

$$\mathcal{H}(1,1) = \begin{bmatrix} -12 & 12 \\ 12 & -24 \end{bmatrix}, \ \det\mathcal{H} > 0, A = -12 < 0 \Rightarrow (1,1) \text{ er et (lokalt) toppunkt.}$$

$\mathcal{H}(1,-1) = \begin{bmatrix} -12 & -12 \\ -12 & -24 \end{bmatrix}$, $\det\mathcal{H} > 0, A = -12 < 0 \Rightarrow (1,-1)$ er er også et (lokalt) toppunkt.

Det gjenstår å undersøke det kritiske punktet $(0,0)$ litt nøyere. Funksjonsverdien i origo er $T(0,0) = 16$. Fra funksjonsutrykket $T(x,y) = 6xy^2 - 2x^3 - 3y^4 + 16$ ser vi at hvis vi beveger oss ut fra origo langs positiv x-akse ($y = 0$), så vil funksjonsverdien minke ($T(x,0) = 16 - 2x^3$), mens hvis vi beveger oss langs negativ x-akse, så vil funksjonsverdien øke. Vi konkluderer med at $(0,0)$ er et sadelpunkt.

Kommentar: Det kritiske punktet $(0,0)$ må klassifiseres på andre måter enn ved Hessian-matrisa, siden denne ikke gir noen konklusjon. Det er ikke tilstrekkelig å finne punkt utenfor origo hvor funskjonsverdien er høyere/lavere enn i origo for å konkludere med at origo er et sadelpunkt, det må finnes punkt *uvilkårlig nær* $(0,0)$ hvor funskjonsverdien er høyere/lavere. Hvis ikke kan origo være et lokalt topp- eller bunnpunkt.

c) En maur befinner seg i punktet $(1,0)$. Er det mulig for mauren å krype i en retning hvor den vil oppleve en temperaturøkning på $6\,^oC$ pr. lengdeenhet?

Løsningsforslag: Maksimal temperaturendring pr. lengdeenhet ut fra punktet $(1,0)$ er gitt ved $|\nabla T(1,0)| = |[-6,0]| = 6$. Svaret er dermed ja, mauren kan oppleve en temperaturøkning på $6\,^oC$ pr. lengdeenhet (dersom den beveger seg i retning $[-1,0]$).

d) En annen maur kryper langs kurva $y = x^2 - 1$ med konstant fart $\frac{1}{6}$ lengdeenheter pr. tidsenhet.Hvor stor temperaturendring opplever mauren i det den passerer punktet $(1,0)$?

Løsningsforslag: Vi trenger den retningsderiverte til T i den retningen mauren kryper i det den passerer $(1,0)$. Retningen er gitt ved *tangenten* til kurva mauren kryper langs. Kurva $y = x^2 - 1$ kan parametriseres ved $\mathbf{r}(t) = [t, t^2 - 1]$, $t \in \mathbb{R}$. Denne har tangentvektor $\mathbf{r}'(t) = [1, 2t]$. Vi er interessert i tangenten i det $t = 1$, siden mauren da befinner seg i det aktuelle punktet. En enhetsvektor i retningen mauren kryper blir derfor $\hat{v} = (\pm)\frac{1}{\sqrt{5}}[1,2]$. (Fortegnet avhenger av om mauren beveger seg i positiv eller negativ x-retning.) Temperaturendring pr. lengdeenhet blir $D_{\hat{v}}T(1,0) = \nabla T(1,0) \cdot \hat{v} = [-6,0] \cdot (\pm)\frac{1}{\sqrt{5}}[1,2] = (\mp)\frac{6}{\sqrt{5}}$. Temperaturendring pr. tidsenhet finner vi ved å multiplisere med maurens fart. Mauren opplever en temperaturendring på $\frac{1}{\sqrt{5}}{}^oC$ pr tidsenhet. (Endringen er negativ i positiv x-retning og positiv i negativ x-retning.)

Oppgave 4

Finn minste avstand fra origo til kurven $xy^2 = 54$.

Løsningsforslag: Avstandsfunksjonen fra origo til et punkt i planet er $d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Velger å minimerer kvadratet av avstanden for lettere regning. Setter derfor $f(x, y) = d^2(x, y) = x^2 + y^2$, og skal minimere f under tileggsbetingelsen $xy^2 = 54$. Velger Lagrange multiplikatormetode. Setter derfor $g(x, y) = xy^2$ og løser $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ under tilleggsbetingelsen $g(x, y) = 54$.

$$
\begin{array}{rcll}
\nabla f & = & \lambda \nabla g & \wedge \quad xy^2 = 54 \\
[2x, 2y] & = & \lambda\, [y^2, 2xy] & \\
2x = \lambda y^2 & \wedge & 2y = \lambda 2xy & \\
 & & \underline{\lambda = \frac{1}{x}} \text{ (dersom } x \neq 0, y \neq 0) & \\
2x = \frac{1}{x} y^2 & & & \\
\underline{y^2 = 2x^2} & & & \\
 & & & 2x^3 = 54 \\
 & & & \underline{x = 3} \\
\underline{y^2 = 18} & & &
\end{array}
$$

Vi ser at $x = 0$ og/eller $y = 0$ er umulig i likningen $xy^2 = 54$. Vi ser også at dersom y går mot null i denne likningen, så må x gå mot uendelig. Av dette følger det at avstanden fra origo til kurven kan bli uvilkårlig stor. Minste avstand må derfor være $d = \sqrt{9 + 18} = \sqrt{27}$.

Kommentar: Oppgaven kan løses like greit på andre måter, for eksempel ved å bruke tilleggsbetingelsen $xy^2 = 54 \Rightarrow y^2 = \frac{54}{x}$ til å redusere oppgaven til et minimaliseringsproblem for envariabelfunksjonen $\tilde{f}(x) = x^2 + (\frac{54}{x})^2$. Det skal i prinsippet argumenteres for at verdien man finner er en minimumsverdi og ikke en maksimumsverdi.

Oppgave 5

Gitt vektorfeltet $\mathbf{G}(x, y, z) = [0,\ xy + x^2 z,\ x^2 z - x^3 - \frac{1}{6} y^2]$. Vis at for alle enkle, lukka, stykkevis glatte kurver $\mathcal{C}$ som ligger i planet $3x + y + z = 7$ så gjelder

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{T}} ds = 0.$$

Løsningsforslag: Vektorfeltet $\mathbf{G}(x, y, z)$ er et glatt vektorfelt i hele $\mathbb{R}^3$. For alle enkle, lukka, stykkevis glatte kurver $\mathcal{C}$ kan vi derfor benytte Stokes teorem $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{T}} ds = \iint_S \operatorname{curl} \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$, der S er en stykkevis glatt flate med randkurve $\mathcal{C}$ og $\hat{\mathbf{N}}$ er en enhetsnormalvektor til S, passelig orientert i forhold til $\mathcal{C}$.

For en lukket kurve $\mathcal{C}$ som ligger i planet $3x+y+z=7$ kan vi la S være området i dette planet avgrenset av $\mathcal{C}$. (Enhets)normalvektor til S vil da være $\pm\frac{1}{\sqrt{11}}[3,1,1]$, hvor fortegnet avhenger av orienteringen til $\mathcal{C}$. Vi må også beregne curlen til $\mathbf{G}$:

$$\operatorname{curl}\mathbf{G} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & (xy+x^2z) & (x^2z - x^3 - \frac{1}{6}y^2) \end{vmatrix} = [-\frac{1}{3}y - x^2, -2xz+3x^2, y+2xz]$$

Dermed har vi

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{G}\cdot\hat{\mathbf{T}}ds &= \iint_S \operatorname{curl}\mathbf{G}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = (\pm)\tfrac{1}{\sqrt{11}}\iint_S[-\tfrac{1}{3}y - x^2, -2xz+3x^2, y+2xz]\cdot[3,1,1]\,dS \\ &= (\pm)\tfrac{1}{\sqrt{11}}\iint_S(-y-3x^2-2xz+3x^2+y+2xz)\,dS = (\pm)\tfrac{1}{\sqrt{11}}\iint_S 0dS = 0 \end{aligned}$$

Kommentar: For å bruke Stokes teorem i denne oppgaven, må man kommentere at forutsetningene for resultatet er oppfylt.

Oppgave 6

La $\mathcal{R}$ være området som ligger over paraboloiden $z = x^2+y^2-5$ og under halvkuleflaten $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$. Det opplyses at paraboloiden og kuleflaten skjærer hverandre i planet $z=4$. La $\mathcal{S}$ betegne overflata til $\mathcal{R}$ med enhetsnormal $\hat{\mathbf{N}}$ rettet ut av $\mathcal{R}$.

a) Finn volumet av området $\mathcal{R}$.

Løsningsforslag: Her er lurt med en figur! Velger sylinderkoordinater for å beregne volumet; $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $z=z$. I sylinderkoordinater blir utrykkene for paraboloiden og halvkulen hhv. $z=r^2-5$ og $z=\sqrt{25-r^2}$, og et volumelement $dV = r\,dzdrd\theta$. Vi finner yttergrensen for r der paraboloiden og halvkulen skjærer hverandre, altså ved $z=4$. Setter vi dette inn i enten likningen for paraboloiden eller halvkulen, finner vi $r=3$. Dermed kan vi velge grensene $0\le\theta\le 2\pi$, $0\le r\le 3$ og $r^2-5\le z\le\sqrt{25-r^2}$. Volumet blir

$$\begin{aligned} \iiint_R dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{r^2-5}^{\sqrt{25-r^2}} r dz dr d\theta = 2\pi\int_0^3 r(\sqrt{25-r^2}-(r^2-5))dr \\ &= 2\pi[-\tfrac{1}{3}(25-r^2)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{4}r^4 + \tfrac{5}{2}r^2]_0^3 = \tfrac{271}{6}\pi \end{aligned}$$

Kommentar: Det går like bra å dele området i to, ett område over planet $z = 4$, hvor kuleflata avgrenser området, og ett område under planet $z = 4$, hvor paraboloiden gir den resterende avgrensingen. Jeg tror likevel sylinderkoordinater gir de enkleste grensebetraktningene for begge områdebitene, men nå kan man om man vil velge konstante grenser for z og varierende grenser for radien r.

b) Regn ut fluksintegralet $\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$ direkte, når

$$\mathbf{F}(x, y, z) = [\frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} + x,\ y - \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2},\ z].$$

Løsningsforslag: For å beregne fluksintegralet direkte trenger vi en enhetsnormalvektor og et utrykk for flateelementet dS. Vi deler overflaten i to biter:

$$\begin{array}{lllll} S_1: & \text{kuleflaten } z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}: & \hat{\mathbf{N}}_1 & = \frac{1}{5}[x, y, z], & dS = 5^2 \sin\phi\, d\theta d\phi \\ S_2: & \text{paraboloiden } z = x^2 + y^2 - 5: & \hat{\mathbf{N}}_2 dS & = (\pm)[-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1]dxdy & \\ & & & = [2x, 2y, -1]dxdy & \end{array}$$

(Vi må passe på å velge normalvektorene slik at de peker ut av området.) Her er planen å bruke kulekoordinater for kuleflatebiten (med konstant radie $\rho = 5$), og polarkoordinater i stedet for kartesiske koordinater for området i xy-planet rett under paraboloidebiten, men det kan være greit å utføre prikkproduktet og rydde litt før en skifter koordinater. Grensene trenger vi imidlertid utrykkt ved de variable vi har tenkt å integrere over.

For kulebiten kan vi la θ gå fra 0 til 2π. Øvre grense for ϕ finner vi der $z = 4$, dvs $4 = 5\cos\phi \Rightarrow \phi = \cos^{-1}(\frac{4}{5})$. Området vi skal integrere over for paraboloidebiten er en sirkel i xy-planet med radius 3, så her har vi $0 \leq \theta \leq 2\pi$ og $0 \leq r \leq 3$.

Vi har:

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}_1\, dS &= \iint_{S_1} [\tfrac{y}{x^2+y^2+z^2} + x,\ y - \tfrac{x}{x^2+y^2+z^2},\ z] \cdot [x, y, z]\, 5 \sin\phi\, d\theta d\phi \\ &= \int_0^{\cos^{-1}(\frac{4}{5})} \int_0^{2\pi} (x^2 + y^2 + z^2) 5 \sin\theta\, d\theta d\phi \\ &= \int_0^{\cos^{-1}(\frac{4}{5})} \int_0^{2\pi} 5^3 \sin\phi\, d\theta d\phi = 5^3 \cdot 2\pi [-\cos\phi]_0^{\cos^{-1}(\frac{4}{5})} = 50\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}_2\, dS &= \iint_D [\tfrac{y}{x^2+y^2+z^2} + x,\ y - \tfrac{x}{x^2+y^2+z^2},\ z] \cdot [2x, 2y, -1]\, dxdy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (2x^2 + 2y^2 - z) r\, drd\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (2r^2 - (r^2 - 5)) r\, drd\theta \\ &= 2\pi [\tfrac{1}{4} r^4 + \tfrac{5}{2} r^2]_0^3 = \tfrac{171}{2}\pi \end{aligned}$$

Den totale fluksen er derfor $\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = 50\pi + \frac{171}{2}\pi = \frac{271}{2}\pi$.

Kommentar: Her var det meningen at fluksintegralet skulle beregnes *direkte*, det vil si uten bruk av for eksempel divergensteoremet. Faktisk er ikke divergensteoremet gyldig i denne situasjonen, siden vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z)$ ikke er definert i origo. Likevel vil vi få rett svar dersom vi bruker divergensteoremet, dette fordi de ubehagelige bitene av vektorfeltet ikke gir noe bidrag verken til fluksen eller divergensen. Dette kan man ikke vite uten å ha studert fluksintegralet!