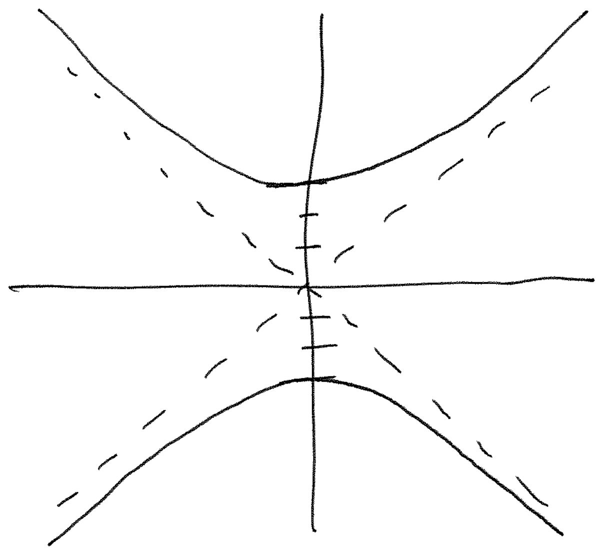
MA1103 3/6 -2011

(1a) $x^2 - y^2 = -9$

- Må ha $y^2 \geq 9$, så $|y| \geq 3$
- $x=0$ gir $y = \pm 3$
- Når $|x|$ øker må $|y|$ øke
- Symmetrisk om x-aksen og y-aksen
- $1 - \frac{y^2}{x^2} = \frac{-9}{x^2}$, så når $|x| \to \infty$ går $\frac{y^2}{x^2}$ mot 1, så $y = \pm 1$ er asymtoter
- Stigningstall for $x=0$?

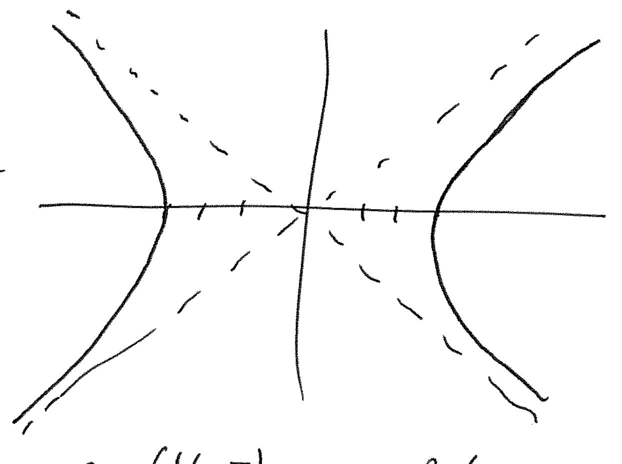
$\frac{d}{dx}(x^2 - y^2) = 2x - 2y\frac{dy}{dx} = 0$

Så $y' = 0$



$x^2 - y^2 = 9$

Multipliser hver side med -1 og se at x og y har byttet rolle i forhold til diskusjonen over:



(1b) $x^2 - y^2 = -9$. $4^2 - 5^2 = -9$, så $(4,5)$ er påkurven

Gradienten til f står normalt på nivåkurver, så $\nabla f(4,5) = (2x, -2y)\big|_{(4,5)} = (8, -10)$ står normalt på kurven i $(4,5)$

$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ er enhetsvektor i retning $(1,1)$, så retningsderivert i $(4,5)$ i denne retningen er

$(D_{\vec{u}} f)(4,5) = \vec{u} \cdot \nabla f(4,5) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \cdot (8,-10) = \underline{\underline{-\sqrt{2}}}$

2a $z = 2x + 4y$ og $z = x^2 + y^2$

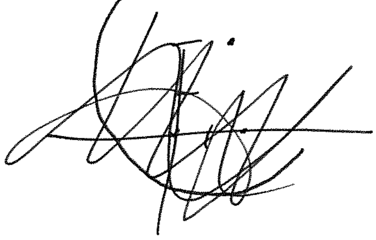
Når skjærer flatene?

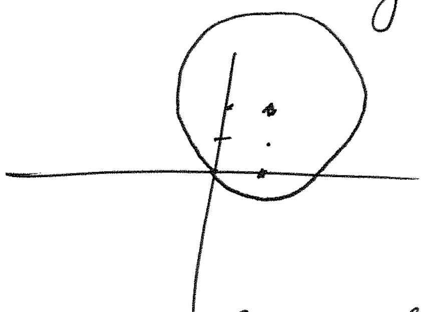
Da er koordinatene, så spesielt z-koordinatene, like,

så $2x + 4y = x^2 + y^2$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1 + 4 = (\sqrt{5})^2$$

Så snitter når x- og y-koordinatene ligger på sirkelen med radius $\sqrt{5}$ og sentrum i $(1,2)$





For x og y innenfor sirkelen ligger paraboloiden under planet. For eksempel i $(x,y) = (1,2)$ har paraboloiden z-verdi $1^2 + 2^2 = \underline{5}$, mens planet har z-verdi $2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = \underline{10}$. Vi kan derfor se på T som området mellom de to grafene $z = x^2 + y^2$ og $z = 2x + 2y$ på ~~området~~ for x og y innenfor sirkelen over. Så

$$\text{Volum}(T) = \iint\limits_{\substack{\text{disk} \\ \text{radius } \sqrt{5} \\ \text{sentrum } (1,2)}} (2x + 4y) - (x^2 + y^2)\, dA$$

$u = x - 1$

$v = y - 1$

$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$

$$= \iint\limits_{\substack{\text{disk} \\ \text{radius } \sqrt{5} \\ \text{sentrum } (0,0)}} -u^2 - v^2 + 5 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{5}} (-r^2 + 5) r \, dr \, d\theta$$

$$= 2\pi \left[\frac{-r^4}{4} + \frac{5}{2} r^2 \right]_0^{\sqrt{5}} = \underline{\underline{\frac{25\pi}{2}}}$$

2b Når $(x,y)=(2,2)$ er $z=10$ på planet og $z=8$ på paraboloiden. Paraboloiden ligger altså fremdeles under planet, så $(2,2,8)$ er på (paraboloide-delen av) S

Vi kan for eksempel bruke en normalvektor til å beskrive tangentplanet. La $f(x,y,z)=x^2+y^2-z$. Da er paraboloiden en nivåflate til f, så

$$\nabla f(2,2,8)=(2x,2y,-1)\Big|_{(2,2,8)}=\underline{(4,4,-1)}$$ er en $\underline{\text{normalvektor}}$ til S i $(2,2,8)$.

Hvis (x,y,z) er et punkt på tangentplanet har vi at $(x,y,z)-(2,2,8)=(x-2,y-2,z-8)$ må være normal på $(4,4,-1)$, så

$$(x-2,y-2,z-8)\cdot(4,4,-1)=0$$

så $$4x-8+4y-8-z+8=0$$

eller $$\underline{\underline{4x+4y-z=8}}$$

er en ligning som beskriver tangentplanet til S i $(2,2,8)$.

(3a) $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$

$\nabla f = \underline{\underline{(2x, 2y, -2z)}}$

$\text{div}(\nabla f) = 2+2+(-2) = \underline{2}$

$\text{curl}(\nabla f) = \underline{\underline{(0,0,0)}}$ (regn ut, eller refere til at curl til konservative felt er null.)

Kritisk punkt vil si $\nabla f = 0$, altså $(2x, 2y, 2z) = (0,0,0)$, så $\underline{(0,0,0)}$ er det eneste kritiske punktet.

(3b) ∇f eksisterer over alt, så f har ingen singulære punkt. Dermed må maks/min oppnås i kritiske punkt eller på randen av ballen.

$(0,0,0)$ er eneste kritiske punkt, og

$f(0,0,0) = \underline{0}$

På randen

Randen kan beskrives som nivåflate til $g(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$ med gradient ~~te~~

$\nabla g = (2x, 2y, 2z)$. I et maks/min må ∇f være parallell med ∇g, altså må det finnes en λ slik at $\nabla g = \lambda \nabla f$, m.a.o.

$$(x,y,z) = \lambda(x, y, -z)$$

Hvis $\lambda \neq 1$ må vi ha $x=y=0$ og $z = \pm 1$,

og $f(0,0,\pm 1) = \underline{\underline{-1}}$

Hvis $r=1$ må $z=0$, og $x^2+y^2=1$.
Da har vi $f(x,y,0)=x^2+y^2=\underline{1}$

Altså er den <u>største verdien</u> f kan oppnå på $x^2+y^2+z^2\le 1$ $\underline{\underline{1}}$, og den minste verdien er $\underline{\underline{-1}}$

3c ∇f er glatt over alt, så fra divergenssetningen vet vi at

$$\iint_S \nabla f\cdot dS = \iiint_{\text{ballen}} \operatorname{div}(\nabla f)\,dV$$

$$= 2\cdot \text{volum(ballen)} = 2\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3 = \underline{\underline{\frac{8}{3}\pi}}$$

3d $x^2+y^2-z^2=2$ og $z=3$.
Da er $x^2+y^2=2+3^2=11$, altså en sirkel, så en lukket kurve, så spørsmålet gir mening.
∇f står normalt på nivåflate til f, så dermed også normalt på kurver i nivåflaten, så $\underline{\nabla f\cdot\hat{T}=0}$, der $\hat{T}$ er enhets tangentvektor til kurven. Så

$$\int_C \nabla f\cdot d\vec{r} = \int_C \nabla f\cdot\hat{T}\,ds = \int_C 0\,ds = \underline{\underline{0}}$$

4a) C_1 kan parametriseres med

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t) \quad 0 \le t < 2\pi.$$

$x^2+y^2=1$ på C_1, så vi får $\frac{1}{2\pi}\int_{C_1} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{C_1} -y\,dx + x\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} -y(t)x'(t) + x(t)y'(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (-\sin t)^2 + (\cos t)^2\,dt = \underline{\underline{1}}$$

4b) ~~Sett~~ $\vec{F}(x,y) = (F_1, F_2) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$

$\vec{F}$ er et <u>glatt vektorfelt</u> på hele planet <u>borsett fra i origo</u>, og vi har

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{-x^2+y^2}{x^2+y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \underline{0}$$

Vi kan anvende Greens setning på $\vec{F}$ på ethvert regulært område R som ikke har origo i sitt indre eller på randen. La R_2 være området innenfor C_2. Da gir Green $\int_{C_2} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = \iint_{R_2} 0\,dA = \underline{\underline{0}}$

Vi kan <u>ikke</u> gjøre det samme for C_3, for her er origo innenfor kurven. Lar vi derimot R være området <u>mellom</u> C_1 og C_3 vil vi unngå origo, og Green gir oss

$$0 = \iint_R \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dA = \int_{C_3} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} - \int_{C_1} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$$

Så $\int_{C_3} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = \int_{C_1} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = \underline{\underline{1}}$