Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag til Eksamen i fag MA1103 Flerdimensjonal analyse 20.05.06

Oppgave 1

Vi har $f(x,y) = (4 - x^2 - y^2)e^{x+y}$.

a) Kritiske punkt har vi der $\nabla f = \mathbf{0}$. Vi partiellderiverer f (produktregel):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -2xe^{x+y} + (4 - x^2 - y^2)e^{x+y} = (4 - x^2 - y^2 - 2x)e^{x+y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= (4 - x^2 - y^2 - 2y)e^{x+y} \text{ (symmetri i } x \text{ og } y) \end{aligned}$$

Vi setter begge de partiellderiverte lik 0 og forkorter faktoren e^{x+y}, siden denne alltid er positiv:

$$\begin{aligned} (1) \quad & 4 - x^2 - y^2 - 2x = 0 \\ (2) \quad & 4 - x^2 - y^2 - 2y = 0 \end{aligned}$$

$(1) - (2)$ gir $x = y$, og setter vi dette tilbake inn i (1) (eller (2)) får vi $x^2 + x - 2 = 0$ som har løsning $x = -2$ og $x = 1$. De kritiske punktene er derfor $(-2, -2)$ og $(1, 1)$.

Merknad 1: Vi kan ikke se bort i fra faktoren e^{x+y} før vi har partiellderivert og satt de deriverte lik 0. Dersom funksjonen vår hadde vært på formen $e^{g(x,y)}$, kunne vi derimot argumentert med at eksponensialfunksjonen er voksende, så det er tilstrekkelig å finne kritiske punkt for eksponentfunksjonen $g(x,y)$.

Merknad 2: Når vi løser $(1) - (2)$ og finner $x = y$, har vi funnet mye mer enn bare de kritiske punktene. Vi har funnet alle punkt hvor de partiellderiverte er like (vi ville jo fått samme resultat om det stod feks 8 på høyre side i begge likningene.) Vi ønsker å finne punktene hvor de partiellderiverte er like, og samtidig lik 0. Derfor må vi putte $x = y$ tilbake inn i en av likningene.

b) For å klassifisere de kritiske punktene, kan vi bruke Hessienmatrisa. Finner derfor først de annenordens partiellderiverte av f:

$$\begin{aligned} A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= (-2x - 2)e^{x+y} + (4 - x^2 - y^2 - 2x)e^{x+y} = (2 - x^2 - y^2 - 4x)e^{x+y} \\ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= (2 - x^2 - y^2 - 4y)e^{x+y} \text{ (symmetri)} \\ B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = (4 - x^2 - y^2 - 2x - 2y)e^{x+y} \end{aligned}$$

Hessienmatrisa settes opp på følgene måte $\mathcal{H} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$, og vi må undersøke determinanten til denne i de kritiske punktene, samt fortegnet til elementet A. Vi tester de kritiske punktene vi fant i a):

$$\mathcal{H}(-2,-2) = e^{-4} \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}, \ \det\mathcal{H} < 0 \Rightarrow (-2,-2) \text{ er et sadelpunkt.}$$

$$\mathcal{H}(1,1) = e^{2} \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}, \ \det\mathcal{H} > 0, A < 0 \Rightarrow (1,1) \text{ er toppunkt.}$$

c) Temperaturen øker mest i gradientretning. Gradienten i $(0,0)$ er $\nabla f(0,0) = [4,4]$, så temperaturen øker mest i retning $[1,1]$ ut fra origo.

En retningsvektor til linja $y = 2x$ er $\mathbf{u} = [1,2]$. Forandringen pr. enhet i denne retnigen er da gitt ved $D_{\hat{\mathbf{u}}} f(0,0) = \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla f(0,0) = \frac{[1,2]}{\sqrt{5}} \cdot [4,4] = \frac{12}{\sqrt{5}}$.

Oppgave 2

Vi skal beregne integralet

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dA,$$

der D er disken $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$, det vil si en disk med radius 1 og sentrum i $(0,1)$. (Se figur 1 i vedlegg.) Vi substituerer med polarkoordinater $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, som gir $dA = r\, dr d\theta$. Vi må finne grensene for r og θ. Disken ligger i det øvre halvplan, så vi har $0 \leq \theta \leq \pi$. Radien avhenger av vinkelen, vi bruker sirkellikningen til å bestemme r som en funkjson av θ:

$$x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \Rightarrow r^2\cos^2\theta + (r\sin\theta - 1)^2 \leq 1 \Rightarrow r(r - 2\sin\theta) \leq 0,$$

som gir $0 \leq r \leq 2\sin\theta$ (siden r alltid er positiv). Dermed:

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dA &= \int_0^\pi \int_0^{2\sin\theta} \sqrt{r^2}\, r\, dr d\theta = \tfrac{8}{3}\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta = \tfrac{8}{3}\int_0^\pi (1-\cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta \\ &= \tfrac{8}{3}[-\cos\theta + \tfrac{1}{3}\cos^3\theta]_0^\pi = \tfrac{32}{9} \end{aligned}$$

<u>Merknad:</u> Det er fristende å flytte koordinatsystemet slik at origo kommer til sentrum av disken D, og så gå over til polarkoordinater. Dette kan gjøres ved å velge $u = x$ og $v = y - 1$, og deretter $u = r\cos\theta$, $v = r\sin\theta$ (eller direkte $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta + 1$). Fortsatt får vi $dA = r\ dr d\theta$. Ulempen med dette er at det gir en vanskelig funksjon å integrere, siden variabelskiftet gir $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{r^2\cos^2\theta + (r\sin\theta+1)^2} = \sqrt{r^2 + 2r\sin\theta + 1}$. (NB! Vi må gjennomføre variableskiftet for integranden også, ikke bare for grensefunksjonene!)

Oppgave 3

Vi skal studere området R, som er avgrenset av flatene $z = y^2$, $z = 2 - y$, $x = 0$ og $x = 2$.

a) En skisse over området er gitt som figur 2 i vedlegget. Vi ser at $0 \leq x \leq 2$ og $y^2 \leq z \leq 2 - y$. Vi finner grensene til y ved å finne y-koordinaten til skjæringslinjene mellom den parabloske sylinderen og skråplanet:

$$y^2 = 2 - y \Rightarrow y^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow y = -2 \vee y = 1 \text{ (samme annengradslikning som i 1a))}$$

Volumet blir dermed

$$V = \iiint_R dV = \int_0^2 \int_{-2}^1 \int_{y^2}^{2-y} dzdydx = 2\int_{-2}^1 2 - y - y^2\, dy = 9$$

b) Vi har fått oppgitt vektorfeltet $\mathbf{F} = [0, 2y - xy, xz]$ og skal beregne fluksen av $\mathbf{F}$ ut gjennom overflaten til R. Vi må dele denne inn i fire deler; se figur 3 i vedlegget.

S_1, planet $x = 0 : \hat{N}_1 dS = [-1, 0, 0]dydz$,
$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{N}_1 dS = 0.$
S_2, planet $x = 2 : \hat{N}_2 dS = [1, 0, 0]dydz$,
$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \hat{N}_2 dS = 0.$
S_3, planet $z = 2 - y : \hat{N}_3 dS = [0, 1, 1]dxdy$,
$\iint_{S_3} \mathbf{F} \cdot \hat{N}_3 dS = \int_0^2\int_{-2}^1 2y - xy + x(2-y)\; dydx = 12$
S_4, (parabolske) sylinderflaten $z = y^2 : \hat{N}_4 dS = [0, 2y, -1]dxdy$,
$\iint_{S_4} \mathbf{F} \cdot \hat{N}_4 dS = \int_0^2\int_{-2}^1 2y(2y - xy) - xy^2\; dydx = 6$

Den totale fluksen blir dermed $\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{N}\; dS = 0 + 0 + 12 + 6 = 18.$

c) Divergensteormete sier at dersom R er et regulært område i rommet og S er (den lukka) overflaten til R, med enhetsnormal $\hat{N}$ pekende ut av R, og $\mathbf{F}$ er et glatt vektorfelt definert på R, så gjelder $\iiint_R \operatorname{div} \mathbf{F}\; dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{N}\; dS$.

I vårt tilfelle er alle betingelser oppfylt. Vi finner divergensen til $\mathbf{F}$: $\operatorname{div} \mathbf{F} = 2 - x + x = 2$. Dermed får vi

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{N}\; dS \iiint_R 2\; dV = 2V(R) = 18.$$

(Her har vi brukt at vi fant volumet til R i oppgave a).)

Vi ser at svaret stemmer godt overens med resultatet vi fikk i oppgave b).

Oppgave 4

Vi er gitt følgende parametrisering av en kurve C:

$$\mathbf{r}(t) : \begin{cases} x &= t - \sin t \\ y &= 1 - \cos t \\ z &= 0 \end{cases}, \quad -\infty < t < \infty.$$

a) Lengden av C når $t \in [0, 2\pi]$ er gitt ved $\int_C ds = \int_0^{2\pi} |\frac{d\mathbf{r}}{dt}|\, dt$. Vi deriverer parameterfremstillingen: $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = [1 - \cos t, \sin t, 0]$. Dermed:

$$\begin{aligned} \int_C ds &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \sin^2 \tfrac{t}{2}}\, dt \\ &= 2\int_0^{2\pi} \sin \tfrac{t}{2}\, dt = 2[-2\cos \tfrac{t}{2}]_0^{2\pi} = 8 \end{aligned}$$

(Her har vi brukt hintet $\frac{1-\cos t}{2} = \sin^2 \frac{t}{2}$ for å omforme utrykket inne i kvadratroten, samt at $\sin \frac{t}{2} \geq 0$ for $t \in [0, 2\pi]$ når vi trekker kvadratroten.)

b) Greens teorem sier at når D er et regulært område i planet med randkurve C, hvor C er en stykkevis glatt, lukket kurve som ikke krysser seg selv og er positivt orientert med hensyn på D (dvs. området D ligger på venstre hånd når vi går rundt C i positiv omløpsretning), og $\mathbf{F} = [F_1, F_2]$ er et glatt, plant vektorfelt definert på D, så gjelder

$$\oint_C F_1\, dx + F_2\, dy = \iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dA.$$

Om vi kaller området begrenset av x-aksen og kurven C når $t \in [0, 2\pi]$ for D, skal vi finne $\iint_D dA$. Hvis vi vil bruke Greens teorem trenger vi et vektorfelt hvor $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$ (eller i alle fall en eller annen konstant). Et mulig valg er $\mathbf{F} = [0, x]$. Vi sjekker at forutsetningene for å bruke teoremet er oppfylt. Merk at randen til D består av to glatte biter; en øvre bit (C_1) som kan parametriseres som i a); $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$ (gir $dx = 1 - \cos t\; dt$ og $dy = \sin t\; dt$), og en nedre bit (C_2) (langs x-aksen), hvor vi kan sette $x = x$ og $y = 0$, for $x \in [0, 2\pi]$ (gir $dy = 0$). Vi må passe på orienteringen når vi integrerer langs kurva, se figur 4 i vedlegget.

Vi finner:

$$A(D) = \iint_D dA = \int_{C_1 \cup C_2} 0dx + xdy = \int_{2\pi}^{0} (t - \sin t) \sin t\; dt = 3\pi$$

c) Vi er gitt en generell kurve C med to ulike parametrisieringer $\mathbf{r}_1(t)$ og $\mathbf{r}_2(u)$ for $a \leq t \leq b$ og $c \leq u \leq d$, som begge er en-til-en. Det er videre antatt at parameriseringene går i samme retning. Dette betyr at for hver $t \in [a.b]$ finnes en unik $u = u(t) \in [c, d]$ slik at $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_2(u(t))$, samt at $\frac{du}{dt} \geq 0$.

Ved å bruke kjerneregelen for derivajson får vi:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}_1(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}_2(u(t)) = \frac{d}{du}\mathbf{r}_2(u)\,\frac{du}{dt}.$$

Dermed:

$$\int_a^b |\frac{d}{dt}\mathbf{r}_1(t)|\,dt = \int_a^b |\frac{d}{du}\mathbf{r}_2(u)\frac{du}{dt}|\,dt = \int_a^b |\frac{d}{du}\mathbf{r}_2(u)|\,\frac{du}{dt}\,dt = \int_c^d |\frac{d}{du}\mathbf{r}_2(u)|\,du,$$

q.e.d.