Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Fagleg kontakt under eksamen:
Marius Irgens (73 55 02 28)

EKSAMEN I FLEIRDIMENSJONAL ANALYSE (MA1103)

Fredag 3. juni 2011
Tid: 15:00 – 19:00 Sensur 27. juni 2011

Hjelpemiddel (Kode D): Bestemt kalkulator (HP 30S eller Citizen SR-270X)

Alle svar skal ha ei god grunngjeving der det går klart fram korleis du har oppnådd svara.
Du finn eit ark med formlar etter oppgåvene.

Oppgåve 1 I denne oppgåva er $f(x, y) = x^2 - y^2$.

a. Skisser nivåkurvene $f(x, y) = -9$ og $f(x, y) = 9$.

b. Sjå på nivåkurva $f(x, y) = -9$. Vis først at punktet $(4, 5)$ ligg på kurva. Finn deretter ein vektor som står normalt på kurva i dette punktet. Finn til slutt den retningsderiverte til $f(x, y)$ i retninga $(1, 1)$ i punktet $(4, 5)$.

Oppgåve 2 La T vere området som ligg mellom planet $z = 2x + 4y$ og paraboloiden $z = x^2 + y^2$, og la S være overflaten til T.

a. Finn volumet til T.

b. Vis at punktet $(2, 2, 8)$ ligg på S, og finn tangentplanet til S i dette punktet.

Oppgåve 3 I denne oppgåva er $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

a. Finn ∇f, $\operatorname{curl}(\nabla f)$ og $\operatorname{div}(\nabla f)$. Finn deretter alle dei kritiske punkta til f.

b. Finn den største og minste verdien $f(x, y, z)$ kan ha på den lukkede kula $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

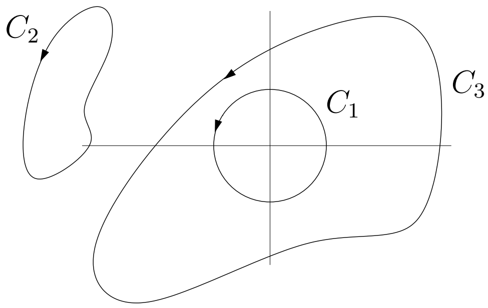
c. Finn fluksen til ∇f ut av overflata til kula i del b. Det vil si, finn

$$\iint_{\mathcal{S}} \nabla f \cdot d\mathbf{S}$$

der $\mathcal{S}$ er sfæren $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ med positiv orientering.

d. La C vere skjeringa mellom nivåflata $f(x, y, z) = 2$ og planet $z = 3$. Gi C orientering mot klokka når sett ovanfrå (frå positiv z). Finn $\displaystyle\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$.

Oppgåve 4 Tre enkle lukka kurver i xy-planet, C_1, C_2 og C_3, er skissert nedanfor. C_1 er sirkelen med sentrum i origo og radius 1. Alle kurvene har positiv orientering (er orientert mot klokka).



a. Rekn ut følgjande kurveintegral:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{C_1} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}.$$

b. Finn det tilsvarande kurveintegralet over dei to resterande kurvene:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{C_2} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} \qquad \text{og} \qquad \frac{1}{2\pi} \int_{C_3} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}.$$

(Hint: Svaret i del a vere nyttig.)