Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt: Heidi Dahl
Telefon: 91695300

Eksamen i fag MA1103 Flerdimensjonal analyse

Bokmål
Mandag 14.desember 2009
Kl. 09.00-13.00
Sensur faller 14.01 2010

Hjelpemidler: Kalkulator HP30S eller Citizen SR-270X
Vedlagte formelark
Alle svar skal begrunnes. Lykke til!

Oppgave 1 La R være området i xy-planet hvor $x^2 + y^2 \leq 4$ og $y \geq 0$. Regn ut dobbelt-integralet

$$\int\!\!\int_R y\sqrt{x^2+y^2}\, dA.$$

Oppgave 2 La $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

a) Bestem tangentplanet til grafen til f i punktet $(1, 0, 1)$.

b) Finn og klassifiser alle de kritiske punktene til f.

Oppgave 3 La $\mathcal{C}$ betegne skjæringskurva mellom sylinderen $z = x^2$ og planet $x + y = 2$.

a) Gi en parametrisering av kurva $\mathcal{C}$.

En partikkel beveger seg langs $\mathcal{C}$ i økende y-retning. Farten er konstant lik 3 (lengdeenheter per tidsenhet).

b) Finn hastighetsvektoren til partikkelen i det den befinner seg i punktet $P = (1, 1, 1)$.

Oppgave 4 En rettvinklet kasse uten lokk skal ha volum $1m^3$. Materialet i kassens bunn er tre ganger så dyrt per kvadratmeter som materialet i veggene. Kassen skal lages så billig som mulig. Forklar hvordan dette leder til problemet:

$$\textit{Minimer funksjonen } f(x,y,z) = 3xy + 2xz + 2yz \textit{ under betingelsen } xyz - 1 = 0,$$

og løs problemet.

Oppgave 5 La $\mathbf{G}(x,y,z) = (ye^{xy} + 2)\hat{\mathbf{i}} + (xe^{xy} + z^2)\hat{\mathbf{j}} + (2yz + 1)\hat{\mathbf{k}}$.
Vis at $\mathbf{G}$ er et konservativt vektorfelt ved å finne en potensialfunksjon $\phi(x,y,z)$ slik at $\mathbf{G}(x,y,z) = \nabla\phi(x,y,z)$. Hva blir arbeidet $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{T}}\, ds$, der $\mathcal{C}$ er en sirkel i yz-planet med sentrum i origo og radius a? (Her er $\hat{\mathbf{T}}$ enhetstangentvektoren til sirkelen.)

Oppgave 6 La R betegne det kileformede området avgrenset av flatene $z = 0$, $y = x^2$ og $y + z = 1$, og la $\mathbf{F}(x,y,z) = (3x + yz^5)\hat{\mathbf{i}} + z\hat{\mathbf{j}} - z\hat{\mathbf{k}}$.

a) Tegn området R og vis at volumet av R er $\frac{8}{15}$ volumenheter.

b) La S betegne den krumme delen av overflaten til R (altså flata hvor $y = x^2$, og *ikke* medregnet topp- og bunnflaten), med enhetsnormal $\hat{\mathbf{N}}$ rettet ut av R. Beregn fluksen

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS.$$

Oppgave 7 En funksjon $f(x,y)$ kalles *differensierbar* i (a,b) dersom

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k) - f(a,b) - h\,f_1(a,b) - k\,f_2(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0,$$

der $f_1(a,b)$ og $f_2(a,b)$ angir de partiellderiverte i henholdsvis x- og y-retning i punktet (a,b).

Vis at hvis en funksjon er differensierbar i (a,b), så må den også være kontinuerlig i (a,b).