Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt: Heidi Dahl
Telefon: 91695300

Eksamen i fag MA1103 Flerdimensjonal analyse

Bokmål
Tirsdag 8.juni 2010
Kl. 09.00-13.00
Sensur faller 29.06 2010

Hjelpemidler: Kalkulator HP30S eller Citizen SR-270X
Vedlagte formelark
Alle svar skal begrunnes. Lykke til!

Oppgave 1

a) Finn og klassifiser alle kritiske punkt for funksjonen $f(x, y) = 4xy - 2x^2 - y^4$.

b) Bestem maksimal- og minimialverdien til funksjonen $g(x, y) = x^2 - y^3$ på enhetssirkelen $x^2 + y^2 = 1$.

Oppgave 2

La $T(x, y, z) = e^{-(x^2+3y^2+z^2)}$ angi temperaturen i punkt i rommet. Anta at vi måler temperaturen i grader Celsius og bruker meter som lengdeenhet.

a) I hvilken retning ut fra punktet $(1, -1, 1)$ øker temperaturen mest, og hvor stor er økningen i denne retningen?

b) En flue flyr langs skjæringskurven mellom flatene $z = x^2$ og $x+y+z = 1$. I det den passerer punktet $(1, -1, 1)$ er farten til flua $0,5$ meter per sekund. Hvor stor temperaturendring opplever flua i dette øyeblikket?

Oppgave 3

Gitt funksjonen

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{Ax^3 + By^3 - xy}{2x^2 + 2y^2} & \text{for } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{for } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Bestem konstanter A og B slik at $f_1(0,0) = 3$ og $f_2(0,0) = 0$.

La nå $A = 6$ og $B = 0$. Er f kontinuerlig i origo for dette valget av konstanter?

Oppgave 4

La R være området i rommet som ligger over kjegleflaten $z = \sqrt{3\,(x^2 + y^2)} - 6$ og innenfor kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 36$. Det opplyses at flatene skjærer hverandre i planet $z = 3$.

a) Tegn en figur og beregn volumet til området R.

b) Beregn overflatearealet av området R.

Oppgave 5

La $\mathcal{C}$ være kurven $y = \sin^2 x$ i xy-planet, for $-\pi \leq x \leq \pi$, og la $\mathbf{F}(x,y) = [e^y - 2y - 2, xe^y + x^2]$. Finn verdien av integralet

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}}\, ds.$$

Oppgave 6

Hva vil det si at et vektorfelt er konservativt?
Vis at hvis $\mathbf{F}(x,y,z)$ er et glatt, konservativt vektorfelt på hele $\mathbb{R}^3$, så er $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}}\, ds = 0$ for enhver lukket, stykkevis glatt kurve $\mathcal{C}$ i rommet.