Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag, eksamen MA1103 Flerdimensjonal analyse, 8.juni 2010

Oppgave 1

a) Finn og klassifiser alle kritiske punkt for funksjonen $f(x,y) = 4xy - 2x^2 - y^4$.

Løsningsforslag: Kritiske punkt finner vi der (begge!) de partiellderiverte er null:

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial f}{\partial x} = 4y - 4x &= 0 \quad \wedge \quad & \tfrac{\partial f}{\partial y} = 4x - 4y^3 &= 0 \\
x &= y \quad \wedge & x &= y^3 \\
& & y &= y^3 \\
& & y - y^3 &= 0 \\
& & y(1-y^2) &= 0 \\
& & y(1-y)(1+y) &= 0
\end{aligned}$$

Vi ser at vi må ha $y = 0$, $y = 1$ eller $y = -1$, og finner de tilhørende x-verdiene fra $x = y$. Dermed får vi de kritiske punktene $\underline{(0,0),\ (1,1) \text{ og } (-1,-1)}$.

For å klassifisere bruker vi Hessianmatrisa, som består av de annenordens partiellderiverte.

$$\mathcal{H}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -12y^2 \end{bmatrix}$$

$$(0,0) : \mathcal{H}(0,0) = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \det \mathcal{H}(0,0) = -16 < 0 \Rightarrow \underline{(0,0) \text{ er et sadelpunkt.}}$$

$$(1,1) : \mathcal{H}(1,1) = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -12 \end{bmatrix}, \det \mathcal{H}(1,1) = 32 > 0, A = -4 < 0 \Rightarrow \underline{(1,1) \text{ er et toppunkt.}}$$

$$(-1,-1) : \mathcal{H}(-1,-1) = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -12 \end{bmatrix}, \det \mathcal{H}(-1,-1) = 32 > 0, A = -4 < 0 \Rightarrow \underline{(-1,-1) \text{ er et toppunkt.}}$$

Siden funksjonen (er kontinuerlig og) blir negativ for store $x-$ og/eller $y-$verdier, er $(1,1)$ og $(-1,-1)$ globale (og lokale) toppunkt.

b) Bestem maksimal- og minimialverdien til funksjonen $g(x, y) = x^2 - y^3$ på enhetssirkelen $x^2 + y^2 = 1$.

Løsningsforslag: Her er det mange fremgansmåter som kan benyttes, skisserer et par, fullfører den de fleste har valgt:

- Parametrisering av sirkelen ved $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ (radien er 1) gir en en-variabelfunksjon $\tilde{g}(\theta) = \cos^2\theta - \sin^3\theta$. Merk at vi har begrensningen $\theta \in [0, 2\pi]$. Finner maksimal- og minimalverdi ved å sjekke punkt der den deriverte er null, samt verdien i endepunktene.

- Direkte substitusjon av sirkelbetingelsen $x^2+y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1-y^2$ gir en en-variabelfunksjon i y (evt. i x), $\tilde{g}(y) = (1-y^2)-y^3$. Her har vi begrensningen $y \in [-1, 1]$. Igjen finner vi maksimal- og minimalverdi ved derivasjon og kontroll av endepunkt(!).

- Lagrange multiplikatormetode: Setter $h(x, y) = x^2 + y^2$ og løser $\nabla g(x, y) = \lambda \nabla h(x, y)$ under betingelsen $h(x, y) = 1$. Dette gir likningssettet

$$\begin{array}{lrl} 1) & 2x & = \lambda 2x \\ 2) & -3y^2 & = \lambda 2y \\ 3) & x^2 + y^2 & = 1 \end{array}$$

Den første likningen har løsning når $x = 0$ eller $\lambda = 1$. For $x = 0$ gir likning 3) at vi må ha $y = \pm 1$. For $\lambda = 1$ gir likning 2) at $-3y^2 = 2y$, som har løsning $y = 0$ eller $y = -\frac{2}{3}$. Vi finner de tilhørende x-verdiene fra likning 3).

Dermed har vi følgende aktuelle punkt: $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(\frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{2}{3})$ og $(-\frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{2}{3})$. Vi setter inn i $g(x, y)$ for å avgjøre hva som er maksimal- og hva som er minimalverdien. Finner at $\underline{g_{\text{maks}} = g(1, 0) = g(0, -1) = 1}$ og $\underline{g_{\text{min}} = g(0, 1) = -1}$.

Kommentar: De fleste har valgt Lagrange metode her, men dessverre har også langt de fleste glatt forkortet bort både x'er og y'er fra likningene uten å sjekke hva som skjer når disse er null. Da står man igjen med punktene $(\frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{2}{3})$ og $(-\frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{2}{3})$, som *begge* gir funksjonsverdi $\frac{23}{27}$. Det bør da ringe en varselklokke! Kan man avgjøre hva som er maksimalverdien og hva som er minimalverdien når de har samme verdi? Betyr dette at funksjonen er konstant lik $\frac{23}{27}$ på hele sirkelen? Hvorfor fikk vi da bare to punkt å teste? Her var det altså kritisk å sjekke hva som skjedde når x og/eller y var null, men det skal alltid kommenteres hva som skjer når det man forkorter bort er null, uansett om det skjer noe spennende eller ikke!

Når det gjelder de andre fremgansmåtene er det en del som glemmer å sjekke endepunkt. Dette skal også alltid gjøres.

Oppgave 2

La $T(x,y,z) = e^{-(x^2+3y^2+z^2)}$ angi temperaturen i punkt i rommet. Anta at vi måler temperaturen i grader Celsius og bruker meter som lengdeenhet.

a) I hvilken retning ut fra punktet $(1,-1,1)$ øker temperaturen mest, og hvor stor er økningen i denne retningen?

Løsningsforslag: Temperaturen øker mest i gradientretning, og økningen er lik lengden av gradientvektoren.

Vi har $\nabla T(x,y,z) = [-2xe^{-(x^2+3y^3+z^2)}, -6ye^{-(x^2+3y^3+z^2)}, -2ze^{-(x^2+3y^2+z^2)}]$, så i punktet $(1,-1,1)$ øker temperaturen mest i retning $\underline{\nabla T(1,-1,1) = [-2,6,-2]e^{-5}}$ og økningen er $|\nabla T(1,-1,1)| = \sqrt{4+36+4}e^{-5} = \underline{2\sqrt{11}e^{-5}}$.

b) En flue flyr langs skjæringskurven mellom flatene $z = x^2$ og $x+y+z = 1$. I det den passerer punktet $(1,-1,1)$ er farten til flua $0,5$ meter per sekund. Hvor stor temperaturendring opplever flua i dette øyeblikket?

Løsningsforslag: Vi må finne den retningsderiverte i den retningen flua beveger seg. Dermed trenger vi en enhetsvektor som er *tangent* til kurven den beveger seg langs. Dette kan finnes på flere måter, velger å parametrisere kurven ved å bruke x som parameter. Trenger da y- og $z-$koordinatene utrykt ved x, de oppgitte likningene for skjæringskurven gir oss $z = x^2$ og $y = 1-x-z = 1-x-x^2$. Dermed kan parametriseringen skrives $\mathbf{r}(x) = [x, 1-x-x^2, x^2]$, for $x \in \mathbb{R}$. Merk at punktet $(1,-1,1)$ tilsvarer $x = 1$.

Tangentretningen finner vi ved å derivere, $\frac{d\mathbf{r}}{dx} = [1, -1-2x, 2x]$. For $x = 1$ har vi da tangentvektoren $[1,-3,2]$. Normaliserer for å få en enhetsvektor $\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{\sqrt{14}}[1,-3,2]$ i den retningen flua flyr (evt. motsatt retning).

Den retningsderiverte er nå gitt ved $D_{\hat{\mathbf{u}}}T(1,-1,1) = \nabla T(1,-1,1) \cdot \hat{\mathbf{u}} = -\frac{24}{\sqrt{14}}e^{-5}$. Dette er temperaturendring i grader Celsius per meter. Vi ønsker temperaturendring per sekund, så vi multipliserer med fluas fart i det akutelle øyeblikket, som er $0,5$ meter per sekund. Dermed får vi at flua opplever en temperaturendring på $\underline{\frac{12}{\sqrt{14}}e^{-5} \text{ grader Celsius per sekund}}$.

Temperaturendringen er negativ dersom flua beveger seg langs kurva i økende x-retning, og positiv dersom den beveger seg motsatt vei langs kurva.

Kommentar: En del velger å argumentere med at eksponentialfunksjonen er kontinuerlig og voksende, slik at det er tilstrekkelig å se på eksponenten når vi løser oppgaven. Det vil gi riktig retning på den retningsderiverte, men alle størrelser vil bli gale.

Oppgave 3

Gitt funksjonen

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{Ax^3 + By^3 - xy}{2x^2 + 2y^2} & \text{for } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{for } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Bestem konstanter A og B slik at $f_1(0,0) = 3$ og $f_2(0,0) = 0$.

La nå $A = 6$ og $B = 0$. Er f kontinuerlig i origo for dette valget av konstanter?

Løsningsforslag: Siden vi har delt forskrift ved punktet $(0,0)$, må vi bruke definisjonen av de partiellderiverte her. Vi har

$$\frac{\partial f}{\partial x}|_{(0,0)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{Ah^3}{2h} - 0}{h} = \frac{A}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}|_{(0,0)} = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{\frac{Bk^3}{2k} - 0}{k} = \frac{B}{2}$$

Vi ser at vi må velge $\underline{A = 6 \text{ og } B = 0}$ for å tilfredstille $f_1(0,0) = 3$ og $f_2(0,0) = 0$.

Kravet som må være tilfredsstilt for at funksjonen skal være kontinuerlig i origo, er at

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0.$$

Sjekker ved å se hva som skjer langs noen enkle veier inn mot origo.

Langs linja $y = x$ får vi

$$\lim_{(x,x) \to (0,0)} \frac{6x^3 - x^2}{2x^2 + 2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{6x - 1}{4} = -\frac{1}{4}$$

.

Siden $-\frac{1}{4} \neq 0 = f(0,0)$ kan vi allerede konkludere at funskjonen *ikke* er kontinuerlig i origo. (Alternativt kunne vi brukt polarkoordinater her, vi ville da fått et utrykk som avhenger av vinkelen, og dermed eksisterer ikke grensen.)

Oppgave 4

La R være området i rommet som ligger over kjegleflaten $z = \sqrt{3(x^2+y^2)} - 6$ og innenfor kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 36$. Det opplyses at flatene skjærer hverandre i planet $z = 3$.

a) Tegn en figur og beregn volumet til området R.

Løsningsforslag: Kjegleflaten har bunnpunkt i $(0, 0, -6)$ og åpning oppover. Kula har radius 6 og sentrum i origo. Området vil se ut som en slags kuleis, hvor kjegla er kjeksen og øverste del av kula er isen. (Isen er *ikke* en halvkule.)

Bruker sylinderkoordinater for å beskrive området, det vil si vi setter $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ og $z = z$. Trenger å beskrive grensene for θ, r og z. Velger å la θ gå fra 0 til 2π og radien r gå fra 0 til sin maksimalradie, som vi har der kuleflata og kjegleflata skjærer hverandre, altså i høyde $z = 3$. Fra kulelikningen (evt. kjeglelikningen eller figuren) finner vi at her er $r^2|_{z=3} = x^2 + y^2|_{z=3} = 36 - z^2|_{z=3} = 36 - 9 = 27$, slik at radien er $3\sqrt{3}$. Høyden z avhenger av radien r, men går hele tiden fra kjegleflata til kuleflata. Skriver derfor om disse likningene til sylinderkoordinater og løser for z. Det gir $\sqrt{3}r - 6 \le z \le \sqrt{36 - r^2}$. Merk at et volumelement i sylinderkoordinater kan utrykkes $dV = r\,dz\,dr\,d\theta$, så vi får at volumet er gitt ved

$$V(R) = \iiint_R dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{3\sqrt{3}}\int_{\sqrt{3}r-6}^{\sqrt{36-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^{3\sqrt{3}} r[z]_{\sqrt{3}r-6}^{\sqrt{36-r^2}}\,dr$$

$$= 2\pi\int_0^{3\sqrt{3}} \sqrt{36-r^2}r - \sqrt{3}r^2 + 6r\,dr = 2\pi[-\frac{1}{3}(36-r^2)^{3/2} - \frac{\sqrt{3}}{3}r^3 + 3r^2]_0^{3\sqrt{3}} \underline{= 126\pi}$$

b) Beregn overflatearealet av området R.

Løsningsforslag: Her deler vi overflaten i to deler. Den øverste delen (S_1) ligger på kuleflata, så det er naturlig å velge kulekoordinater for å parametrisere (parametriserer ved vinklene θ og ϕ, radien ρ er konstant lik 6 her og er ingen parameter!). Trenger grensene for θ og ϕ. Vi kan velge θ til å gå fra 0 til 2π, mens figuren viser at ϕ går fra 0 til den vinkelen vi har når kuleflata og kjegleflata skjærer hverandre. En figur og litt trigonometri gir at dette er ved $\phi = \frac{\pi}{3}$. Flateelementet i kulekoordinater er gitt ved $dS = 6^2 \sin\phi\,d\theta\,d\phi$. Dermed er denne delen av overflaten gitt ved

$$A(S_1) = \iint_{S_1} dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} 36\sin\phi\,d\phi\,d\theta = 36\cdot 2\pi[-\cos\phi]_0^{\frac{\pi}{3}} = 36\pi$$

Den andre biten av overflaten (S_2) ligger på kjegleflaten $z = \sqrt{3(x^2+y^2)} - 6$, som er en graf. Velger x og y som parametre. Et flateelement er da gitt ved $dS = \sqrt{(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2 + 1}\,dxdy$, som her blir $dS = \sqrt{\frac{9x^2}{3(x^2+y^2)} + \frac{9y^2}{3(x^2+y^2)} + 1}\, dxdy = \sqrt{3+1}\, dxdy = 2\, dxdy$. Figuren viser at vi må velge x og y slik at vi holder oss innenfor en disk D med sentrum i origo og radius $3\sqrt{3}$. Arealet av denne biten av overflaten blir

$$A(S_2) = \iint_{S_2} dS = \iint_D 2\, dxdy = 2A(D) = 2\pi(3\sqrt{3})^2 = 54\pi$$

Totalarealet er dermed 90π.

Oppgave 5

La $\mathcal{C}$ være kurven $y = \sin^2 x$ i xy-planet, for $-\pi \le x \le \pi$, og la $\mathbf{F}(x, y) = [e^y - 2y - 2, xe^y + x^2]$. Finn verdien av integralet

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}}\, ds.$$

Løsningsforslag: Direkte parametrisering av kurven med x som parameter gir $\mathbf{r}(x) = [x, \sin^2 x]$, slik at $\hat{\mathbf{T}}\, ds = [1, 2\sin x \cos x]\, dx$, og setter vi dette inn i integralet får vi et lite fristende utrykk. Vi forsøker derfor en annen strategi. En skisse av kurven $\mathcal{C}$ viser at den ikke er lukket, men den kan enkelt lukkes ved å legge til en kurve $\mathcal{C}_2$ som følger x-aksen mellom $-\pi$ og π. Forsøker derfor å benytte Greens teorem. Vi må passe på orienteringen her! Vi får et lukket område R på venstre hånd av kurven om vi følger $\mathcal{C}_2$ fra $-\pi$ til π og så følger $-\mathcal{C}$ tilbake. Legg merke til at området er symmetrisk om y-aksen. Vi vil trenge en parametrisering av $\mathcal{C}_2$, velger $\mathbf{r}(x) = [x, 0]$, $x \in [-\pi, \pi]$, som gir $\hat{\mathbf{T}}\, ds = [1, 0]\, dx$. Dessuten må vi regne ut curlen til vektorfeltet, som her er $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = (e^y + 2x) - (e^y - 2) = 2x + 2$. Alle forutsetninger for å bruke Greens teorem er nå oppfylt, og teoremet gir

$$\oint_{\mathcal{C}_2 \cup -\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}}\, ds = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA$$

Dermed er

$$\begin{aligned}
\int_{-\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}}\, ds &= \iint_R \left(\tfrac{\partial F_2}{\partial x} - \tfrac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA && - \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}}\, ds \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\sin^2 x} 2x + 2\, dy\, dx && - \int_{-\pi}^{\pi} [e^0 - 2, xe^0 + x^2] \cdot [1, 0]\, dx \\
&= 0_{((\text{anti})\text{symmetri})} + 2\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\, dx && - \int_{-\pi}^{\pi} -1\, dx \\
&= 2\int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)\, dx && +2\pi \\
&= [x - \tfrac{1}{2}\sin 2x]_{-\pi}^{\pi} && +2\pi \\
&= \pi - 0 - (-\pi - 0) && +2\pi \\
&= 4\pi
\end{aligned}$$

Verdien av integralet vi er interessert i er da $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}}\, ds = -\int_{-\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}}\, ds = -4\pi$.

Kommentar: Oppgaven kan løses vel så enkelt ved å observere at vektorfeltet kan deles opp i en bit som er konservativ og en som ikke er det, for eksempel kan vi skrive $\mathbf{F}(x,y) = [e^y - 2y - 2, xe^y + x^2] = [e^y - 2, xe^y] + [-2y, x^2]$. Her er første del konservativ, med potensialfunksjon $\phi(x,y) = xe^y - 2x$, og dermed er integralet lik

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}}\, ds &= \phi((\pi,0)) - \phi((-\pi,0)) && + \int_{\mathcal{C}} [-2y, x^2] \cdot \hat{\mathbf{T}}\, ds \\
&= -2\pi && + \int_{-\pi}^{\pi} [-2\sin^2 x, x^2] \cdot [1, 2\sin x \cos x]\, dx \\
&= -2\pi && + \int_{-\pi}^{\pi} -2\sin^2 x + x^2 \sin x \cos x\, dx \\
&= -2\pi && -2\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\, dx + 0_{((\text{anti})\text{symmetri})} \\
&= -2\pi && -2\pi \\
&= -4\pi
\end{aligned}$$

Oppgave 6

Hva vil det si at et vektorfelt er konservativt?
Vis at hvis $\mathbf{F}(x,y,z)$ er et glatt, konservativt vektorfelt på hele $\mathbb{R}^3$, så er $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}}\, ds = 0$ for enhver stykkevis glatt, lukket kurve $\mathcal{C}$ i rommet.

Løsningsforslag:

Definisjonen sier at et vektorfelt $\mathbf{F}(x,y,z)$ kalles konservativt på et område R dersom det finnes en skalarfunksjon $\phi(x,y,z)$ slik at $\mathbf{F}(x,y,z) = \nabla\phi(x,y,z)$ på hele R. Funksjonen $\phi(x,y,z)$ kalles en potensialfunksjon for $\mathbf{F}(x,y,z)$.

Vi skal vise at $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}}\, ds = 0$ når $\mathcal{C}$ er en stykkevis glatt, lukket kurve. Lar $\mathcal{C}$ ha parametriseringen $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$, $t \in [a,b]$, slik at vi har $\hat{\mathbf{T}}\, ds = [x'(t), y't), z'(t)]\, dt$. Siden kurven er lukket er $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$. At vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y,z)$ er konservativt betyr at vi kan skrive $\mathbf{F}(x,y,z) = [\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}]$, hvor $\phi(x,y,z)$ er en potensialfunksjon for vektorfeltet. Dermed har vi

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}}\, ds &= \int_a^b [\tfrac{\partial\phi}{\partial x}, \tfrac{\partial\phi}{\partial y}, \tfrac{\partial\phi}{\partial z}] \cdot [x'(t), y't), z'(t)]\, dt = \int_a^b (\tfrac{\partial\phi}{\partial x}\, x'(t) + \tfrac{\partial\phi}{\partial y}\, y'(t) + \tfrac{\partial\phi}{\partial z}\, z'(t))\, dt \\
&= \int_a^b \tfrac{d\phi(\mathbf{r}(t))}{dt}\, dt_{(\text{kjerneregel})} = [\phi(\mathbf{r}(t))]_a^b{}_{\ (\text{fundamentalteoremet})} = 0_{(\text{siden } \mathbf{r}(a)=\mathbf{r}(b))}
\end{aligned}$$