Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Kari Hag: TLF: 73 59 35 21 / 483 01 988 (Mobil)

Eksamen i MA1103 Flerdimensjonal analyse

Mandag den 17. desember 2007
Tid: 09.00-13.00
Hjelpemidler: Godkjent kalkulator (HP30S)
Vedlagt formelark og formelliste
Bokmål
Sensur: 27. januar 2008

Oppgave 1:

Gitt funksjonen $f(x,y) = \frac{2x}{x^2+4y^2}$, definert for alle punkter $(x,y) \neq (0,0)$.

a) Skisser nivåkurvene for f svarende til 0 og 2. Avgjør om

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

eksisterer.

b) Beregn den retningsderiverte til f i $(1,2)$ i retningen $\langle 2,1\rangle$. I hvilken retning er den retningsderiverte størst i $(1,2)$.

Oppgave 2:

Gitt funksjonen $f(x,y) = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$, definert for alle punkter (x,y).

a) Bestem eventuelle kritiske punkter for f.

b) Avgjør om f har noen største eller minste verdi, og angi i så fall disse verdiene.

Oppgave 3:

La T være legemet begrenset : t^3 xy-planet, den parabolske sylinderflaten $y = 4 - x^2$ og planet $z = y$.

Finn volumet til T.

Oppgave 4:

Finn buelengden av romkurven gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = \langle t, \frac{t^2}{\sqrt{2}}, \frac{t^3}{3} \rangle, \qquad 0 \leq t \leq 1$$

Oppgave 5:

La $\mathbf{F} = \langle x, e^{\sin(2z)}, (5 + 3y^{200})^7 \rangle$, og la D være området begrenset av sylinderen $x^2 + y^2 = 1$ og planene $z = -2$ og $z = 4$.

Bruk divergensteoremet til å bestemme fluksen

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS$$

ut gjennom S der S betegner overflaten til D.

Oppgave 6:

Gitt vektorfeltet $\mathbf{F} = \langle 2xye^{x^2}, e^{x^2}, z\rangle$.

a) Avgjør om $\mathbf{F}$ er et konservativt vektorfelt, dvs. om $\mathbf{F}$ er en gradient.

b) Finn verdien av linjeintegralet

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{T}}\,ds \quad \left(= \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}\right)$$

når C er romkurven med parameterfremstilling $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $0 \le t \le \pi$.

Oppgave 7:

La C_1 være sirkelen $x^2+y^2 = 1$, og la C_2 være kurven med ligning $r = \frac{4}{2-\cos\theta}$ i polarkoordinater. C_1 og C_2 orienteres *mot* urviseren, og R betegner området mellom C_1 og C_2.

a) Bestem integralene

$$\oint_{C_1} \frac{-y}{(x^2+y^2)^2}\,dx + \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,dy, \qquad \iint_R \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dA$$

b) Bruk Greens teorem og resultatene i a) til å finne verdien av linjeintegralet

$$\oint_{C_2} \frac{-y}{(x^2+y^2)^2}\,dx + \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,dy$$