LØSNINGER EKSAMEN MA1103, des. '07

Oppgave 1:

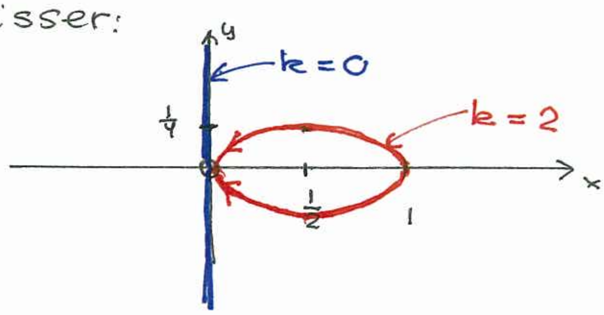
a) Nivåkurve svarende til $k=0$:

$$\frac{2x}{x^2+4y^2}=0 \iff x=0 \quad (y\neq 0).$$

til $k=2$:

$$\frac{2x}{x^2+4y^2}=2 \iff 2x=2x^2+8y^2$$
$$\iff x^2-x+4y^2=0 \iff \frac{(x-\frac{1}{2})^2}{(\frac{1}{2})^2}+\frac{y^2}{(\frac{1}{4})^2}=1.$$

Skisser:



Går vi inn mot $(0,0)$ langs y-aksen blir grensen 0 og langs ellipsen 2, slik at $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ikke eksisterer.

(Vi kan selvfølgelig innse dette uten å bruke nivåkurvene.)

b) Vi skal finne $\nabla f(1,2)\cdot\frac{\langle 2,1\rangle}{\sqrt{5}}$ og beregner

$$\nabla f(1,2)=\left\langle \frac{8y^2-2x^2}{(x^2+4y^2)^2}, \frac{-16xy}{(x^2+4y^2)^2}\right\rangle_{(x,y)=(1,2)}=\left\langle \frac{30}{289}, \frac{-32}{289}\right\rangle$$

slik at $\nabla f(1,2)\cdot\frac{\langle 2,1\rangle}{\sqrt{5}}=\underline{\underline{\frac{28\sqrt{5}}{1445}}}$

Den retningsderiverte er størst i retning $\nabla f(1,2)$, altså i retning $\underline{\underline{\langle 15,-16\rangle}}$.

Oppgave 2

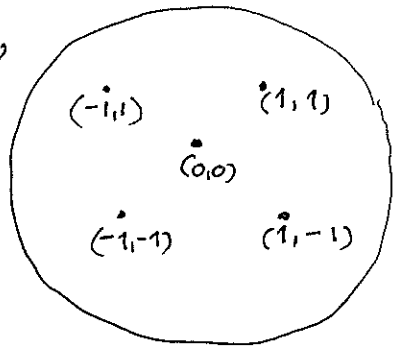
a) Skal finne de kritiske punktene til $f(x,y) = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$.
Da

$$f_x = y\,e^{-x^2/2}(1-x^2)\,e^{-y^2/2} = 0 \Leftrightarrow y=0,\ x=\pm 1$$
$$f_y = x\,e^{-y^2/2}(1-y^2)\,e^{-x^2/2} = 0 \Leftrightarrow x=0,\ y=\pm 1,$$

har vi i alt fem kritiske punkter:

$(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$

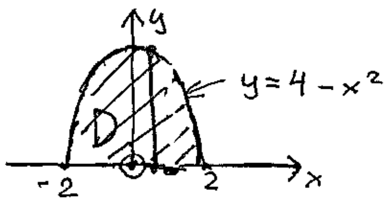
b) Den største verdien i de kritiske punktene er $\underline{\underline{e^{-1}}}$ og den minste $\underline{\underline{-e^{-1}}}$, og dette representerer og så største og minste verdi for funksjonen da $\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} f(x,y) = 0$.

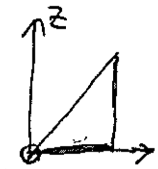


Bmk Dette siste kan vi også innse ved å se på $f(x,y)$ som $\underbrace{xe^{-x^2/2}}\cdot\underbrace{ye^{-y^2/2}}$: Vi har full oversikt over oppførselen til $te^{-t^2/2}$.

Oppgave 3

T kan beskrives slik $0 \le z \le y$; $(x,y) \in D$.



(

Planet $z=y$ går gj. x-aksen.)

$$\mathrm{Vol}(T) = \iint_D \int_0^y dz\, dA = \int_{-2}^{2}\int_0^{4-x^2} y\, dy\, dx$$
$$= 2\int_0^2 (4-x^2)^2/2\, dx = \int_0^2 16 - 8x^2 + x^4\, dx$$
$$= \left[16x - \tfrac{8}{3}x^3 + \tfrac{x^5}{5}\right]_0^2 = \underline{\underline{\frac{256}{15}}}$$

Oppgave 4

$\mathbf{r}'(t) = \langle 1, \sqrt{2}\,t, t^2 \rangle$ slik at buelengden er

$$L = \int_0^1 |\mathbf{r}'(t)|\,dt = \int_0^1 \sqrt{1+2t^2+t^4}\,dt = \int_0^1 (1+t^2)\,dt = t+\frac{t^3}{3}\Big]_0^1 = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

Oppgave 5

$$I = \iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = \iiint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV.$$

Her er $\operatorname{div}\mathbf{F} = 1+0+0$ slik at

$$I = \operatorname{Vol}(D) = \pi\cdot 1^2\cdot 6 = \underline{\underline{6\pi}}$$

Bmk. Om en ikke kjenner formelen for volumet av en sylinder (husker MA1101), får en regne litt, f.eks. $\int_{-2}^{4}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,dr\,d\theta\,dz = 6\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2} = \underline{\underline{6\pi}}$

Oppgave 6

a) Vi går rett på oppgaven med å finne en potensialfunksjon ϕ:

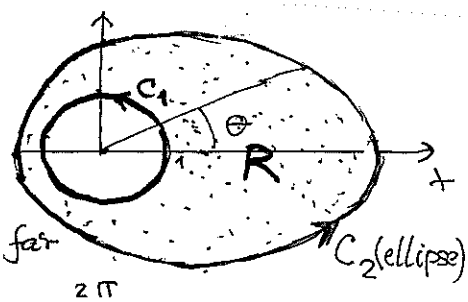
$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial x} &= 2xye^{x^2} \iff \phi = ye^{x^2} + k_1(y,z)\\
\frac{\partial\phi}{\partial y} &= e^{x^2} \iff \phi = ye^{x^2} + k_2(x,z)\\
\frac{\partial\phi}{\partial z} &= z \iff \phi = \tfrac{1}{2}z^2 + k_3(x,y)
\end{aligned}\right\}\ \underline{\underline{\phi = ye^{x^2} + \tfrac{1}{2}z^2 + k}}$$

Alternativt her, da $\mathbf{F}$ er et glatt felt definert i hele $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{F}$ gradientfelt $\iff \operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

b) Vi har allerede funnet potensialfunksjonen ϕ slik at

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \phi(\cos\pi, \sin\pi, \pi) - \phi(\cos 0, \sin 0, 0)\\ &= \tfrac{1}{2}\pi^2 - 0 = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\pi^2}}\end{aligned}$$

Oppgave 7



a) Bruker parametriseringen

$x = \cos t$, $y = \sin t$; $0 \le t \le 2\pi$, og får

$$\oint_{C_1} \cdots = \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t\,(-\sin t)}{1^2} + \frac{\cos t \cdot \cos t}{1^2}\, dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = \underline{\underline{2\pi}}$$

$$I_R = \iint_R \frac{dA}{(x^2+y^2)^2} \underset{\substack{x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta}}{=} \int_0^{\pi}\int_1^{4/(2-\cos\theta)} \frac{1}{r^4}\, r\, dr\, d\theta = -\int_0^{\pi} \left(\frac{2-\cos\theta}{4}\right)^2 - 1\, d\theta$$

$$I_R = -\int_0^{\pi} \left(\frac{4 - 2\cos\theta + \cos^2\theta}{16} - 1\right) d\theta$$

$$= -\left(\frac{1}{4}\pi + 0 + \frac{\pi}{32} - \pi\right) = \underline{\underline{\frac{23}{32}\pi}}$$

b)

For å bruke Greens teorem finner vi først

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2+y^2)^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{2(x^2+y^2)^2 - 4(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^4}$$

$$= \underline{\frac{-2}{(x^2+y^2)^2}}$$

Altså har vi

$$\int_{-C_1} \cdots + \int_{C_2} \cdots = \iint_R \frac{-2}{(x^2+y^2)^2} = -2\, I_R = -\frac{23}{16}\pi$$

og

$$\int_{C_2} \frac{-y}{(x^2+y^2)^2}\, dx + \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\, dy = -\frac{23}{16}\pi + 2\pi = \underline{\underline{\frac{9\pi}{16}}}$$