Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Instituttt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Marius Irgens (41 39 82 99)

EKSAMEN I FLERDIMENSJONAL ANALYSE (MA1103)

Bokmål
Tirsdag 6. august 2013
Tid: 09:00 – 13:00

Hjelpemidler:
Kode D: Bestemt, enkel kalkulator

Oppgavesettet har 2 sider, etterfulgt av et formelark.

Sensur: 27. august 2013

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten kommer tydelig frem fra besvarelsen.

Oppgave 1 Finn en ligning for tangentplanet til flaten $z^2 = 2x^2 - y^2$ i punktet $(1, -1, 1)$.

Oppgave 2 Vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy, x^2, 1)$ er definert for alle (x, y, z) i rommet.

a) Vis at $\mathbf{F}$ er et konservativt vektorfelt.

b) La C være kurven i rommet med parametrisering $\mathbf{c}(t) = (t^3, 2, t^2 + 1)$, $0 \leq t \leq 1$. Finn

$$\int_C \mathbf{F} \cdot ds$$

Oppgave 3 Finn og klassifiser alle de kritiske punktene til funksjonen

$$f(x,y) = xe^{-x^2-y^2}$$

Oppgave 4 Vis at en av grensene under eksisterer mens den andre ikke eksisterer.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad\qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Oppgave 5 Finn det punktet på planet $3x - 2y + z = 7$ som ligger nærmest origo.

Oppgave 6 La C være randen til trekanten i xy-planet med hjørner $(0,0)$, $(0,1)$ og $(1,1)$. Finn

$$\int_C e^{y^2-x^2} \cos 2xy \, dx + e^{y^2-x^2} \sin 2xy \, dy$$

Oppgave 7 La T være legemet gitt ved $x \geq 0$, $y \geq 0$ og $0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2+y^2}$. La S være overflaten til T orientert med enhetsnormal som peker ut av legemet T.

a) Finn $\iiint_T z(x^2+y^2)\, dV$

b) Finn $\iint_S (x + \cos y, y + \sin z, z + e^x) \cdot d\mathbf{S}$

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Marius Irgens (735 50228)

EKSAMEN I FLERDIMENSJONAL ANALYSE (MA1103)

Onsdag 22. mai 2013
Tid: 09:00 – 13:00 Sensur 12. juni 2013

Hjelpemidler (Kode D):
Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt. (Citizen SR-270X (College) eller Hewlett Packard HP30S)

Forklar alle svarene dine.
Du finner et ark med formler etter oppgavene.

Oppgave 1 Fra fysiske lover kan en se at om K er et homogent legeme i $\mathbf{R}^3$, så må temperaturen $T = T(x, y, z, t)$ i K være en løsning til *varmelikningen*

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial T}{\partial t}$$

der (x, y, z) er posisjonen i legemet, t er tiden, og k er en materialkonstant.

Vis at $T(x, y, z, t) = 2x - y + z$ er en løsning til varmelikningen.

Oppgave 2 I USA definerer postverket "størrelsen" ("size") til en pakke som summen av lengde (length) og "girth", der "girth" er omkretsen normalt på lengden. "Størrelsen"/"size" kan ikke være mer enn 130 tommer.

Hva er største volum (i kubikktommer) en rektangulær pakke kan ha?

Oppgave 3 En kurve C er parametrisert med

$$\mathbf{c}(t) = (t^2, 2t, 4-t), \qquad -2 \leq t \leq 2$$

a) Vis at punktet $(1,2,3)$ ligger på kurven C, og finn en tangentvektor til kurven i dette punktet, med lengde 1.

b) Finn en likning for planet som står normalt på kurven i punktet $(1,2,3)$.

Oppgave 4 Vi sier at en funksjon er $\mathcal{C}^2$ om alle andreordens partiellderiverte er kontinuerlige. Vis at om f er en $\mathcal{C}^2$ funksjon, så er $\operatorname{curl} \nabla f = \mathbf{0}$. Si klart fra hvordan du bruker at funksjonen er $\mathcal{C}^2$.

Oppgave 5 Vi lar funksjonen $f(x,y) = x^3 - xy^2 - 2x^2 + y^2$ ha hele planet som definisjonsområde.

a) Finn alle kritiske punkt til f og klassifiser disse som lokale maksimum, lokale minimum eller sadelpunkt.

b) Har f globale maksimum eller minimum? Finn i så fall disse.

Oppgave 6 I denne oppgaven er

- S sfæren (kuleoverflaten) med sentrum i $(0,0,3)$ og radius 5, orientert slik at normalvektorene peker ut av kula.
- S^+ den delen av S som ligger over xy-planet, med samme orientering som S
- C randen til S^+, med positiv orientering i samsvar med orienteringen til S^+
- T området avgrenset av S^+ og xy-planet
- $\mathbf{F}(x,y,z) = (16 - x^2 - y^2, z, x+y+z)$

a) Finn en parametrisering for kurven C (husk orienteringen). Lag en skisse som viser S^+, C og T. Merk på orienteringene til S^+ og C.

b) Finn volumet til området T.

c) Finn fluksen til $\operatorname{curl} \mathbf{F}$ gjennom flaten S^+

$$\int_{S^+} \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$