Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Kari Hag
TLF: 73 59 35 21 / 483 01 988 (Mobil)

Eksamen i MA1103 Flerdimensjonal analyse

Dato: Mandag 2. juni 2008
Tid: 9:00 – 13:00
Hjelpemidler: Godkjent kalkulator
Vedlagt Formelark og Formelliste
Bokmål
Sensur: 23 juni

Oppgave 1 La

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{når } xy = 0 \\ 2008 & \text{ellers} \end{cases}$$

Begrunn at f har partielle deriverte i $(0,0)$. Er f deriverbar ("differentiable") i $(0,0)$?

Oppgave 2 La $z = f(x,y)$ og la (r,θ) være polarkoordinatene til (x,y). Anta videre at betingelsene for kjerneregelen er oppfylt. Finn $\frac{\partial z}{\partial r}$ og $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ uttrykt ved $\frac{\partial z}{\partial x}$ og $\frac{\partial z}{\partial y}$, og vis at

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

Oppgave 3 Finn maksimum og minimum av $f(x,y) = 27xy(1-x-y)$ over trekanten med hjørner $(0,0), (1,0)$ og $(0,1)$.

Oppgave 4 Beregn det itererte integralet

$$\int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)\, dy \right] dx$$

ved å innføre polarkoordinater.

Oppgave 5 Finn massen av ei halvkule med radius a når massetettheten δ er proporsjonal med kvadratet av avstanden til sentrum. Dvs. med kulas sentrum i origo er $\delta(\mathbf{r}) = k|\mathbf{r}|^2$ for en positiv konstant k.

Oppgave 6 Gitt vektorfeltet $\mathbf{v}(x,y) = \omega(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$ der ω er en konstant. Hva blir verdien av linjeintegralet

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

når C er en sirkel med radius a?

Oppgave 7 Finn en funksjon $f(x)$ slik at linjeintegralet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

bare avhenger av endepunktene til C når $\mathbf{F} = \langle 2xyz, x^2 z, yf(x) \rangle$.

Oppgave 8 La $\mathbf{F} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$ der $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

(a) Vis at $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$.

(b) Vis at

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS \neq 0$$

når S er ei kuleflate med sentrum i $(0,0,0)$. Hvorfor er ikke dette i strid med divergensteoremet?

Oppgave 9 La $m, n \in \mathbb{N}$ og beregn dobbeltintegralet

$$\iint_R (x-y)^m (3y-x)^n\, dx\, dy$$

der R er parallellogrammet med hjørner i $(0,0), (3,1), (5,3)$ og $(2,2)$.

(Hint: Det lønner seg å bytte variable.)